رياضيات ٥

كتاب التمارين

التعليم الثانوي - نظام المقررات

مسار العلوم الطبيعية

العبيكان Obeikan

McGraw Hill Education

قررت وزارة التعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

طبعة ١٤٣٧ هـ - ٢٠١٦ م

يوزع مجانًا ولا يباع

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

رياضيات ٥

التعليم الثانوي- نظام المقررات - مسار العلوم الطبيعية

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان
خلود عبد الحفيظ لوباني
عمر محمد أبوغليون
أحمد مصطفى سمارة
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

المشرف على لجان المراجعة
د. محمد بن عبد الله الزغيبي

المراجعة والاعتماد النهائي
صلاح بن عبدالله الزيد
د. خالد بن عبدالله المعثم
نجوى رجب محمد الشوا
لميا عبدالله يحي خان
شادية أحمد عيسى باعزيز

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

الفهـــــرس

الفصل الأول:

تحليل الدوال

1-1 الدوالّ ____ 4

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات ____ 5

1-3 الاتصال والنهايات ____ 6

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير ____ 7

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية 8

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين ____ 9

1-7 العلاقات والدوال العكسية ____ 10

الفصل الثاني:

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2-1 الدوال الأسّية ____ 11

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسّية ____ 12

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية ____ 13

2-4 خصائص اللوغاريتمات ____ 14

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية ____ 15

2-6 اللوغاريتمات العشرية ____ 16

الفصل الثالث:

المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-1 المتطابقات المثلثية ____ 17

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية ____ 18

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما ____ 19

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها ____ 20

3-5 حل المعادلات المثلثية ____ 21

الفصل الرابع:

القطوع المخروطية

4-1 القطوع المكافئة ____ 22

4-2 القطوع الناقصة والدوائر ____ 23

4-3 القطوع الزائدة ____ 24

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ____ 25

1 - 1 الدوالّ

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$

2) $-6.5 < x \leq 3$

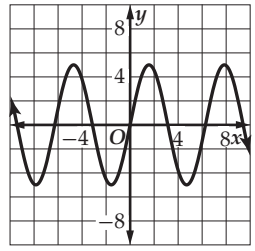
3) $x < 3$

4) $x < 0$ أو $x > 8$

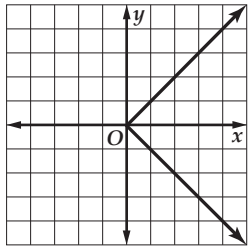
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

5) تمثل x رقم لوحة السيارة، و y سنة صنع السيارة.

6)



7)



8) $-x + y = 3x$

9) $x = 5(y-1)^2$

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

10) $h(x) = x^2 - 8x + 1$

a) $h(-1)$

b) $h(2x)$

c) $h(x+8)$

11) $f(a) = -3\sqrt{a^2+9}$

a) $f(4)$

b) $f(3a)$

c) $f(a+1)$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

12) $g(x) = \sqrt{-3x-2}$

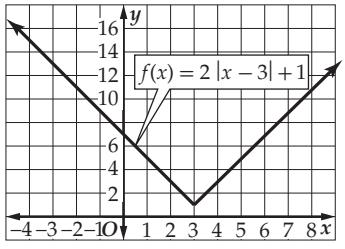
13) $h(t) = \dfrac{2t-6}{t^2+6t+9}$

14) أوجد $f(-4)$ و $f(11)$ للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16\,, & x < -2 \\ \sqrt{x-2}\,, & -2 < x \leq 11 \\ -75\,, & x > 11 \end{cases}$$

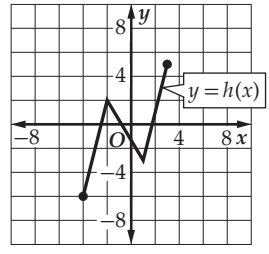
1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوالِّ والعلاقات

1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(7), f(1), f(-2.5)$، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

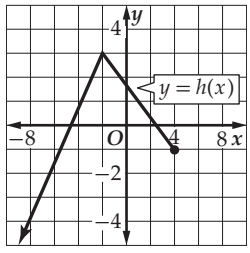


استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.

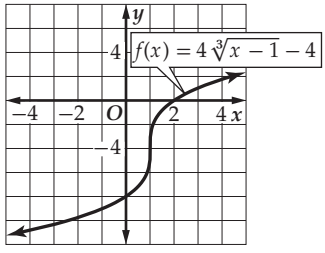
2)



3)

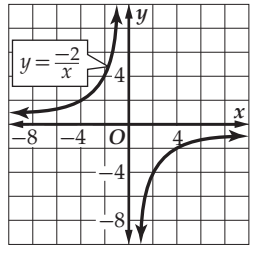


4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.

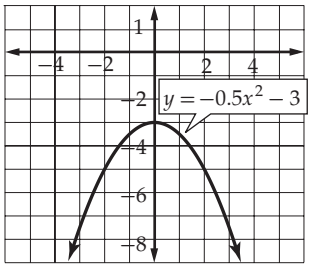


استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. وعزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا:

5)



6)



7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانيًّا، ثم حلِّل منحناها؛ لتحدد إن كانت الدالة زوجيةً أم فرديةً أم غير ذلك. ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجيةً أو فرديةً فصِف تماثل منحناها.

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

1) $f(x) = -\frac{2}{3x^2}; x = -1$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x+4}; x = -4$

3) $f(x) = x^3 - 2x + 2; x = 1$

4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2};\ x = -1\ ,\ x = -2$

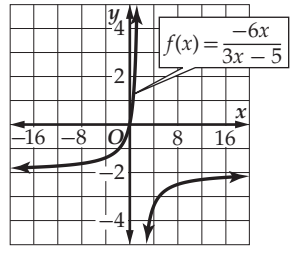
حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

5) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4; [-6, 2]$

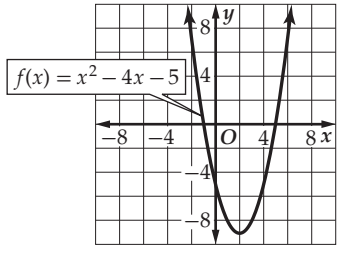
6) $g(x) = x^4 + 10x - 6; [-3, 2]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا:

7)



8)

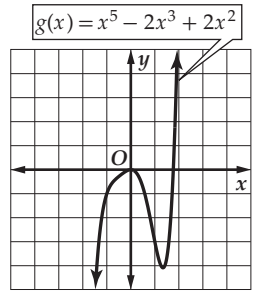


9) إلكترونيات: يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟

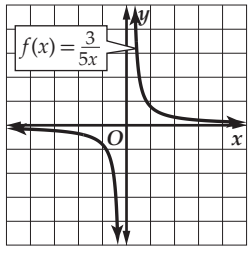
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا:

1)

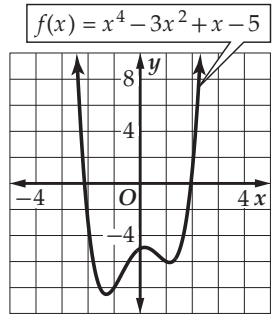


2)

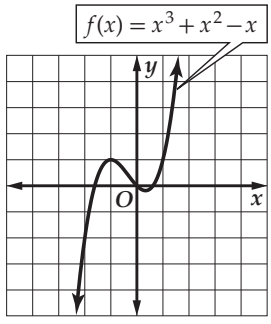


قدِّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

3)



4)



5) أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$. وحدّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

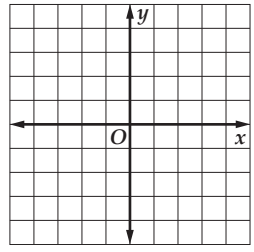
أوجد متوسط معدّل التغير لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$

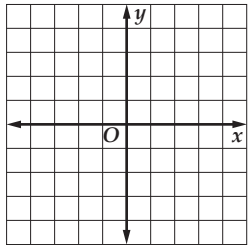
7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$

8) فيزياء: إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا يُعطَى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ.

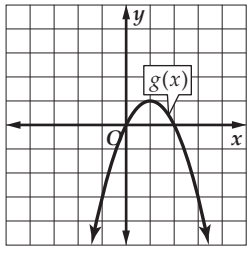
1) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانيًّا .



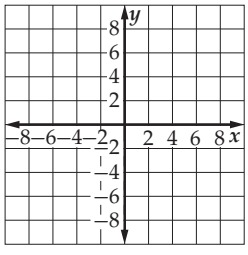
2) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانيًّا.



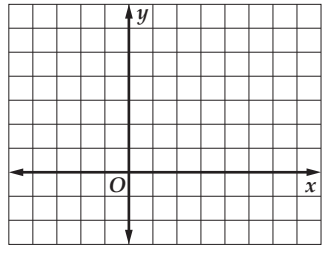
3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.



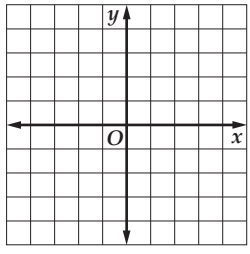
4) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x+2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.



5) مثِّل الدالة بيانيًّا $f(x) = \begin{cases} -1\ , & x \le -3 \\ 1 + x\ , & -2 < x \le 2 \\ [x]\ , & 4 \le x \le 6 \end{cases}$



6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \left|(x+1)^3\right|$



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، وحدّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6$

2) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1}$

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x + 5, g(x) = x - 3$

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = 3x$

5) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x - 3$

6) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, g(x) = 2x - 1$

حدّد مجال $g \circ f$، ثم أوجد $g \circ f$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

7) $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 3x$

8) $f(x) = \frac{1}{x-8}$
$g(x) = x^2 + 5$

أوجد دالتين f و g في كلٍّ من السؤالين 9, 10، بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

9) $h(x) = \sqrt{2x-6} - 1$

10) $h(x) = \frac{1}{3x+3}$

11) مطعم: دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلٌّ منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثِّل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثِّل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1) $f(x) = 3|x| + 2$

2) $f(x) = -\sqrt{x+3} - 1$

3) $f(x) = x^5 + 5x^3$

4) $f(x) = \frac{x}{5} + 9$

في كلٍّ مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب: غير موجودة.

5) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

6) $f(x) = \frac{2x-1}{x+7}$

7) $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$

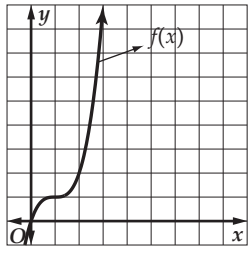
8) $f(x) = \sqrt{x-2}$

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9) $f(x) = 2x + 3; g(x) = \frac{x-3}{2}$

10) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6; x \geq 0; g(x) = \sqrt{2x+12}$

11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$:

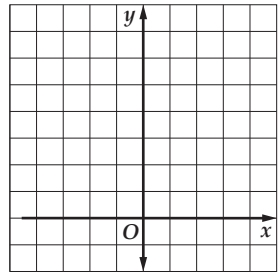


12) مكافحة الحرائق: تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة.

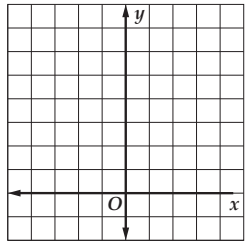
2 - 1 الدوال الأسية

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجالها، ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:

1) $y = 3.11^x$، $3\,(11)^{-0.2}$

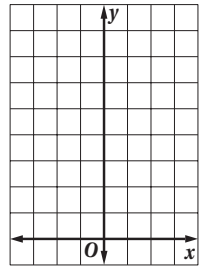


2) $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$، $\left(\frac{1}{12}\right)^{0.5}$

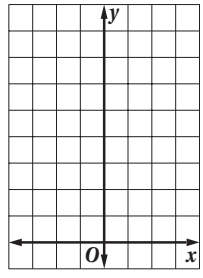


مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها.

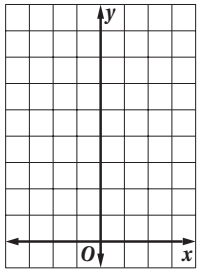
3) $y = 1.5(2)^x$



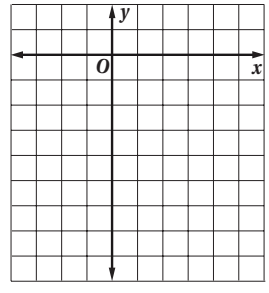
4) $y = 4(3)^x$



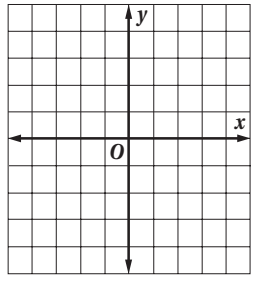
5) $y = 3(0.5)^x$



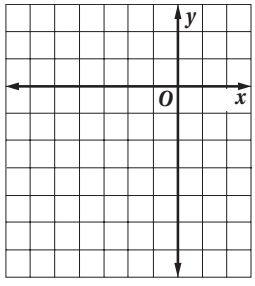
6) $y = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8$



7) $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$



8) $y = \frac{1}{2}(3)^{x+4} - 5$



9) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يوميًّا.

a) اكتب دالة أسيّة تمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم.

b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟

10) جامعات: بلغ عدد طلاب السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ، ويُتوقَّع زيادة العدد بنسبة 5% سنويًّا. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلاب السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 1429 هـ.

2 - 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

1) $4^{x+35} = 64^{x-3}$

2) $\left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2}$

3) $3^{x-4} = 9^{x+28}$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1}$

6) $3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$

7) $400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$

8) $10^{2x+7} = 1000^{x}$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ **للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:**

9) $(0,5), (4,3125)$

10) $(0,8), (4,2048)$

11) $(0,\frac{3}{4}), (2,36.75)$

12) $(0,-0.2), (-3,-3.125)$

13) $(0,15), \left(2,\frac{15}{16}\right)$

14) $(0,0.7), \left(\frac{1}{2},3.5\right)$

حُلَّ كل متباينة مما يأتي:

15) $400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$

16) $10^{2x+7} \geq 1000^{x}$

17) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq 64^{x-1}$

18) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5}$

19) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \leq 216^{x-3}$

20) $128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x}$

21) علوم: إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العينتين؟

2 - 3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسيَّة:

1) $\log_6 216 = 3$ **2)** $\log_2 64 = 6$ **3)** $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

4) $\log_{10} 0.00001 = -5$ **5)** $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ **6)** $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

7) $5^3 = 125$ **8)** $7^0 = 1$ **9)** $3^4 = 81$

10) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ **11)** $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ **12)** $7776^{\frac{1}{5}} = 6$

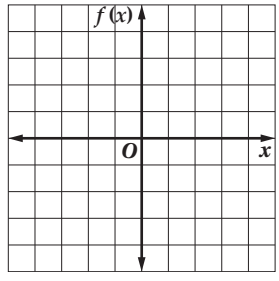
أوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $\log_3 81$ **14)** $\log_{10} 0.0001$ **15)** $\log_2 \frac{1}{16}$ **16)** $\log_{\frac{1}{3}} 27$

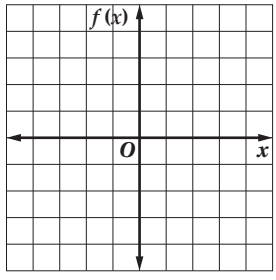
17) $\log_9 1$ **18)** $\log_8 4$ **19)** $\log_7 \frac{1}{49}$ **20)** $\log_6 6^4$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

21) $f(x) = \log_2 (x - 2)$



22) $f(x) = -2 \log_4 x$



23) صوت: تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوتٍ شدته 120 dB؟

24) استثمار: استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقِّعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4%، وتُضاف الأرباح سنويًّا إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقَّع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [100000(1 + 0.04)^5]$، فاكتب المعادلة على الصورة الأسّية.

2 - 4 خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ ، $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ **لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي:**

1) $\log_{10} 35$

2) $\log_{10} 25$

3) $\log_{10} \frac{7}{5}$

4) $\log_{10} \frac{5}{7}$

5) $\log_{10} 245$

6) $\log_{10} 175$

7) $\log_{10} 0.2$

8) $\log_{10} \frac{25}{7}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

9) $\log_2 [(2x)^3 (x + 1)]$

10) $\log_8 [(4x + 2)^3 (x - 4)]$

11) $\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x - 3}}$

12) $\log_2 \frac{(x + 1)^3}{\sqrt[3]{x + 5}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

13) $3 \log_2 (5x + 6) - \frac{1}{2} \log_2 (x - 4)$

14) $2 - \log_7 6 - 2 \log_7 x$

15) $\log_3 8 + \log_3 x - 2 \log_3 (x + 4)$

16) $\log_{10} y + \log_{10} 3 - \frac{1}{3} \log_{10}(x) + 2 \log_{10} z$

17) $\log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 z$

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

18) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

19) $\log_{100} 10000$

20) $\log_2 \sqrt[5]{4}$

21) صوت: تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تُعطَى بالعلاقة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟

2 - 5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

1) $x + 5 = \log_4 256$

2) $\log_3 (4x - 17) = 5$

3) $\log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x$

4) $\log_6 (3 - x) \leq \log_6 (x - 1)$

5) $\log_8 (-6x) = 1$

6) $\log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x$

7) $\log_7 n = \frac{2}{3} \log_7 8$

8) $\log_{10} u = \frac{3}{2} \log_{10} 4$

9) $\log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54$

10) $\log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4$

11) $\log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u$

12) $4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405$

13) $\log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3} \log_3 64$

14) $\log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8$

15) $\log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2$

16) $\log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4$

17) $\log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12$

18) $\log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6$

19) $\log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1)$

20) $\log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1$

21) $\log_{10} 4 + \log_{10} w = 2$

22) $\log_8 (n - 3) + \log_8 (n + 4) = 1$

23) $3 \log_5 (x^2 + 9) - 6 = 0$

24) $\log_{16} (9x + 5) - \log_{16} (x^2 - 1) = \frac{1}{2}$

25) $\log_6 (2x - 5) + 1 = \log_6 (7x + 10)$

26) $\log_2 (5y + 2) - 1 = \log_2 (1 - 2y)$

27) $\log_{10} (c^2 - 1) - 2 = \log_{10} (c + 1)$

28) $\log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72$

29) $\log_8 (-6x) < 1$

30) $\log_9 (x + 2) > \log_9 (6 - 3x)$

31) $\log_{81} x \leq 0.75$

32) $\log_2 (x + 6) < \log_2 17$

33) $\log_{12} (2x - 1) > \log_{12} (5x - 16)$

34) $\log_{10} (x - 5) > \log_{10} 2x$

35) $\log_2 (x + 3) < \log_2 (1 - 3x)$

2 - 6 اللوغاريتمات العشرية

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $\log 101$ **2)** $\log 2.2$ **3)** $\log 0.05$

استعمل الصيغة $pH = -\log[H+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

4) الحليب : $[H+] = 2.51 \times 10^{-7}\ \text{mol/L}$

5) المطر الحمضي : $[H+] = 2.51 \times 10^{-6}\ \text{mol/L}$

6) القهوة: $[H+] = 1.0 \times 10^{-5}\ \text{mol/L}$

7) الحليب الغني بالماغنيسيوم : $[H+] = 3.16 \times 10^{-11}\ \text{mol/L}$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

8) $5^a = 120$ **9)** $6^z = 45.6$ **10)** $3.5^x = 47.9$

11) $8.2^y = 64.5$ **12)** $4^{2x} = 27$ **13)** $2^{a-4} = 82.1$

14) $5^{w+3} = 17$ **15)** $30^{x^2} = 50$ **16)** $5^{x^2-3} = 72$

17) $4^{2x} > 9^{x+1}$ **18)** $2^{n+1} \le 5^{2n-1}$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

19) $\log_5 12$ **20)** $\log_8 32$ **21)** $\log_{11} 9$

22) $\log_2 18$ **23)** $\log_9 6$ **24)** $\log_7 \sqrt{8}$

25) درجة الحموضة: استعمل الصيغة الواردة في الأسئلة 7-4 أعلاه. إذا كان الرقم الهيدروجيني (pH) لمحلول الخل 2.9، وللحليب 6.6، فكم مرة (تقريبًا) يساوي تركيزُ أيون الهيدروجين في الخل تركيزَه في الحليب؟

26) أحياء: تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. ما الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟

27) صوت: تُعطَى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة من شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار تساوي شدةَ الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0° < \theta < 90°$.

1) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$

2) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$

3) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = 4$

4) $\cot\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{2}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180° < \theta < 270°$.

5) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{15}{17}$

6) $\cot\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{3}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$.

7) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{10}$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -8$

9) $\sin\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

10) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

11) $\csc\theta \tan\theta$

12) $\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$

13) $\sin^2\theta \cot^2\theta$

14) $\cot^2\theta + 1$

15) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{1 - \cos^2\theta}$

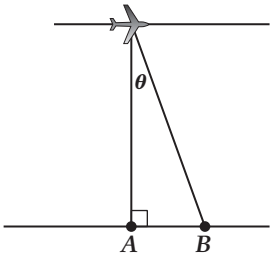
16) $\frac{\csc\theta - \sin\theta}{\cos\theta}$

17) $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

18) $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

19) $\sec^2\theta \cos^2\theta + \tan^2\theta$

20) التصوير الجوي: يُبيّن الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A . وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، بحسب العلاقة: $\sin\theta\,(\csc\theta - \sin\theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos\theta$ فقط.



21) الأمواج: المعادلة $y = a\sin\theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على العوامة عند الزمن t بالثواني. عبّر عن a بدلالة $\csc\theta t$.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

1) $\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

2) $\dfrac{\cos^2\theta}{1 - \sin^2\theta} = 1$

3) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = \cos^2\theta$

4) $\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1 = \sec^4\theta$

5) $\cos^2\theta\cot^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$

6) $\sin^2\theta(\csc^2\theta + \sec^2\theta) = \sec^2\theta$

7) فيزياء: مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2 = \dfrac{2gh}{\sin^2\theta}$ ، حيث θ زاوية القذف، و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحّة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

8) ضوء: تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I = ER^2\sec\theta$ ، حيث E مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، و R المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ الزاوية بين شعاع الضوء والخط العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2(1 + \tan^2\theta)\cos\theta = ER^2\sec\theta$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $\cos 75°$ **2)** $\cos 375°$ **3)** $\sin(-165°)$

4) $\sin(-105°)$ **5)** $\sin 150°$ **6)** $\cos 240°$

7) $\sin 225°$ **8)** $\sin(-75°)$ **9)** $\sin 195°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

10) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

11) $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$

12) $\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

13) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$

14) الطاقة الشمسية: في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E\sin(90° - \phi)$ ، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام ($\cos\phi$) للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ .

15) كهرباء: تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين.

b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان:

1) $\cos \theta = \frac{5}{13}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{8}{17}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{1}{4}; 270° < \theta < 360°$

4) $\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180° < \theta < 270°$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\tan 105°$

6) $\tan 15°$

7) $\cos 67.5°$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta - \sin \theta}{2 \tan \theta}$

10) $\sin 4\theta = 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta$

11) صور جوية: في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط العامودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة الوضوح للنقطة الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ في إثبات أن:

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

1) $\sqrt{2}\cos\theta = \sin 2\theta;\ 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

2) $\sin 2\theta = \cos\theta;\ 90^\circ \le \theta < 180^\circ$

3) $\cos 4\theta = \cos 2\theta;\ 180^\circ \le \theta < 360^\circ$

4) $\cos\theta + \cos(90 - \theta) = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$

5) $2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta;\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

6) $\tan^2\theta + \sec\theta = 1;\ \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

7) $\cos^2\theta = \sin^2\theta$

8) $\cot\theta = \cot^3\theta$

9) $\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta$

10) $\cos^2\theta \sin\theta = \sin\theta$

11) $2\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

12) $\sec^2\theta = 2$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

13) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$

14) $\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$

15) $\frac{3}{1+\cos\theta} = 4(1 - \cos\theta)$

16) $\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

17) $4\sin^2\theta = 3$

18) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

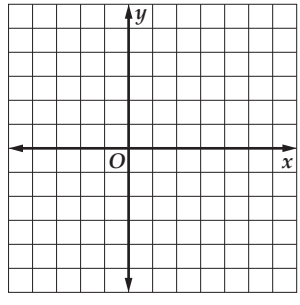
19) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$

20) $\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

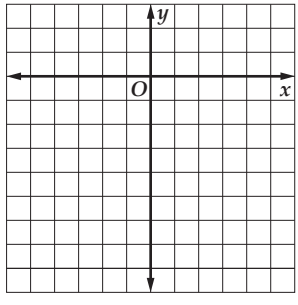
21) كهرباء: يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $j = 3\sin 240t$، حيث j شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب عبارة تصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $(x-1)^2 = 8(y-2)$

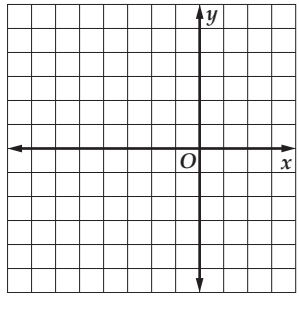


2) $y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x$

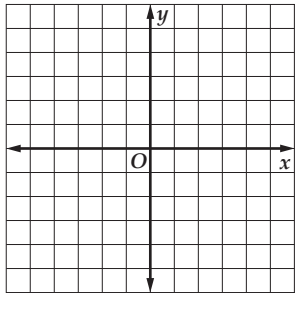


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3 ,4 ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

3) الرأس $(-2, 4)$ ، والبؤرة $(-2, 3)$



4) الرأس $(0, 1)$ ؛ مفتوح أفقيًّا إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(-7, 8)$.

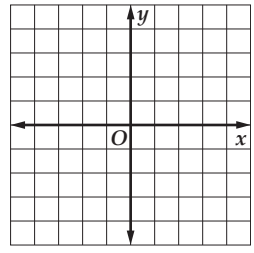


5) اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ ، ثم حدِّد خصائصه.

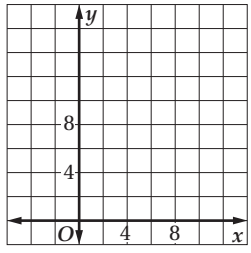
6) قمر اصطناعي: افترض أن طبقًا هوائيًّا على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبِل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجّه إلى أعلى. أوجد معادلةً تمثِّل مقطعًا عرضيًّا للطبق.

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$



2) $25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6)$, $(-12, 6)$ ، و البؤرتان $(2, 6)$, $(-10, 6)$

4) البؤرتان $(-2, 7)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

5) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(y+2)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

7) المركز $(-6, 1)$، والقطر 8 .

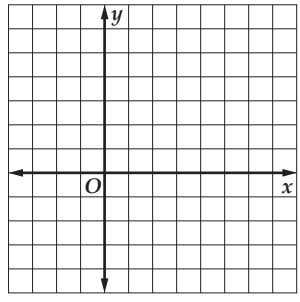
8) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3 .

9) النقطتان $(-4, 1)$,$(3, 2)$ طرفا قطر فيها.

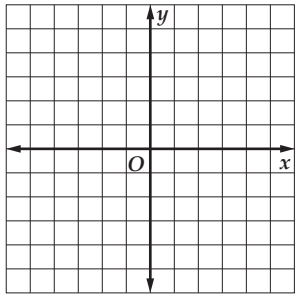
10) نجارة: يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft ، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$



2) $\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6), (-10, 6)$، والبؤرتان $(6, 6), (-12, 6)$

4) البؤرتان $(0, -4), (0, 6)$، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

5) حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+10)^2}{121} = 1$

6) صوت: المسافة بين بيتي صديقين ميلٌ واحدٌ، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معًا على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت 1100 ft/s، فاكتب معادلة القطع الزائد الذي يحدِّد موقع الطائرة.

اكتب كلًّا من المعادلات الآتية على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

2) $25x^2 - 50x^2 + 16y^2 - 375 = 0$

3) $x^2 - 12y - 6x + 69 = 0$

4) $9x^2 - 4y^2 + 8y - 40 = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

5) $5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0$

6) $16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$

7) $4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0$

8) $2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0$