" الــمـــــاب ∞ في علم الحســاب "

كـفـايـات الريـاضيـات ، المستوى الأول + الثانـي

ملخص شـامل لمناهج الرياضيات للتعليم العام+ الجزء التربوي

مع أكثر من 200 سؤال مشروح

...

الطبعة الثالثة 1441

أ / فـاطمة الشـهري

@my__idead

myideaaas

myideaaas@gmail.com

البسملـــة

مقدمــــة :

ملزمة المـآب* تحتوي على اهم محتويات مناهج الرياضيات في التعليـم العام ، مرتبة حسب معايير قياس لمعلمي ومعلمات الرياضيات وتحتوي على العديد من الأسئلة والتمارين المحلولة و المشروحة ، وهي مرجع بإذن الله لكل من يود استرجاع معلوماته في الرياضيات

...

١٤٤٠/١٢/٢٨هـ

تنبيــه : الملزمة مجانية تماماً لا احلل الاستفادة منها مادياً ، نرجو منكم فقط الدعاء بالتوفيق و السعادة في الدارين لصاحبتها و لوالديها : فاطمة محمد الشهري ...

@my__ideas **myideaaas@gmail.com**

#توضيح : بعض المواضيع في الملزمة ليست من معايير المستوى الأول ، تم وضع علامه على الصفحات الخاصة الّتي لا تخص المستوى الاول

اما المستوى الثاني فالملزمة بأكملها داخلة في اختبارهم ...

* المــآب : المـرجع

الفهـرس

المعيار الاول :

مستوى ٢

المعيار	المؤشرات
المعيار ٣. ٤. ١: يتعرف الأعداد والعمليات عليها	١. يتعرف مجموعات الأعداد (الطبيعية، والكلية، والصحيحة، والنسبية، والحقيقية، والمركبة) وتصنيفاتها المختلفة ٢. يلم بالخصائص الأساسية لنظرية الأعداد (القاسم المشترك الأكبر، المضاعف المشترك الأصغر، قابلية القسمة، الأعداد الأولية والمؤلفة، والتطابقات) ٣. يتعرف مفهوم النسبة والتناسب وتطبيقاتها، ويحل مسائل عليها ٤. يستخدم استراتيجيات التقدير والحساب الذهني، ويستطيع الحكم على معقولية النتائج ٥. يجري العمليات على مجموعات الأعداد المختلفة (العمليات الأربع، والمقارنة، والجذور والأسس) ٦. يميز التمثيلات المختلفة للعدد المركب ويوجد مقياسه ومرافقه ٧. يحل مسائل لفظية على الأعداد المختلفة

مستوى ١

المعيار	المؤشرات
المعيار ٣. ١: يتعرف الأعداد والعمليات عليها	١. يتعرف مجموعات الأعداد (الطبيعية، والكلية، والصحيحة، والنسبية، والحقيقية) وتصنيفاتها المختلفة. ٢. يلم بالخصائص الأساسية لنظرية الأعداد (القاسم المشترك الأكبر، المضاعف المشترك الأصغر، قابلية القسمة، الأعداد الأولية والمؤلفة، ....). ٣. يتعرف مفهوم النسبة والتناسب وتطبيقاتها، ويحل مسائل عليها. ٤. يستخدم استراتيجيات التقدير والحساب الذهني، ويستطيع الحكم على معقولية النتائج. ٥. يجري العمليات على مجموعات الأعداد المختلفة (العمليات الأربع، والمقارنة، والجذور والأسس). ٦. يحل مسائل لفظية على الأعداد المختلفة.

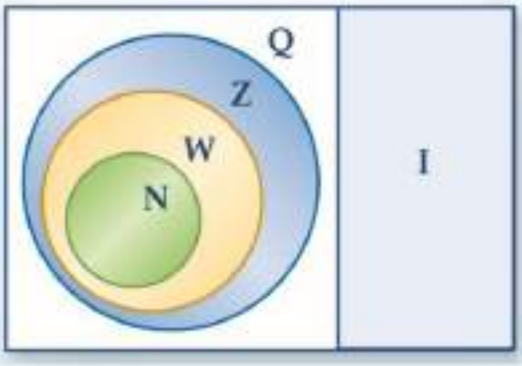
مجموعات الأعداد :

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية (R)

أضف إلى مطويتك

أمثلة	المجموعة	الرمز
$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66...$	الأعداد النسبية	Q
$\pi = 3.14159...$ $\sqrt{3} = 1.73205...$	الأعداد غير النسبية	I
$-5, 17, -23, 8$	الأعداد الصحيحة	Z
$2, 96, 0, \sqrt{36}$	الأعداد الكلية	W
$3, 17, 6, 86$	الأعداد الطبيعية	N

الأعداد الحقيقيّة R



مفهوم أساسي — الأعداد المركبة (C)

أضف إلى مطويتك

خاص بالمستوى 2

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + bi$: حيث a و b عددان حقيقيان، و i الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2i$ $\quad$ $1 - 3i = 1 + (-3)i$

خصائص الأعداد الحقيقية :

الضرب	الجمع	الخاصية
$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$	التبديلية
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	التجميعية
$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$	$a + 0 = a = 0 + a$	العنصر المحايد
$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, a \neq 0$	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	النظير
$(a \cdot b)$ عدد حقيقي	$(a + b)$ عدد حقيقي	الانغلاق
$a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$		التوزيع

العدد الزوجي الصحيح الموجب :

هو العدد الذي رقم آحاده أحد الأرقام التالية: 0 , 2 , 4 , 6 , 8

هو كل عدد يقبل القسمة على (2) بدون باقي.

هو كل عدد من مضاعفات العدد (2).

38546 - 2008 - 100 - 12

: العدد الفردي الصحيح الموجب:

هو العدد الذي رقم آحاده أحد الأرقام التالية: 9 , 7 , 5 , 3 , 1.

هو كل عدد لا يقبل القسمة على (2) بدون باقي.

هو كل عدد ليس من مضاعفات العدد (2).

29643 - 89 – 7

العدد الأولي :

هو العدد الذي يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد (1) فقط

مثال : 11, 7, 5, 3 , 2 ،........ (جميع الاعداد الأولية فردية باستثناء 2)

العدد المؤلف:

هو العدد الذي لديه أكثر من عاملين

$12 = 1\times12 = 2\times6 = 3\times4$ * $9 = 1\times9 = 3\times3$

عوامل 9 : (9, 3, 1) عوامل 12 :(1,2,3,4,6,12)

العدد التـام او المثالي او الكامل كل عدد يتساوى مجموع عوامله(باستثناء نفسه) مع قيمته ، وهو دائما زوجي.

28 = 14+7+4+2+1

6 = 3+2+1

العنصر المحايد

هو العنصر الذي لا يغير قيمة النـاتج من العملية

<u>الصفر</u> : العنصر المحايد في الجمع و الطرح

<u>الواحد</u> : العنصر المحايد في الضرب و القسمة

القيمة المطلقة : هي المسافة بين العدد والصفر

وتكتب نفس قيمة العدد من دون اشارته

|-4| = 4 ، | 4| = 4

العمليات الحسابية على الأعداد الزوجية والفردية :

الجمع والطرح :

زوجي + زوجي = زوجي	$4+6=10$
فردي + فردي = زوجي	$3+7=10$
زوجي + فردي = فردي	$3+4=7$

الضرب :

زوجي × زوجي = زوجي	$4 \times 6 = 24$
فردي × فردي = فردي	$3 \times 7 = 21$
زوجي × فردي = زوجي	$3 \times 4 = 12$

العمليات الأربعة للأعداد السالبة و الموجبة :

	الاشارات متساوية	مثال ←	الاشارات مختلفة	مثال ←
جمع	نجمع ونفس الاشارة	6+2=8 -6 + (-2)= -8	نوجد الفرق بينهما و اشارة الأكبر	6 + (-2) =4 -6 + 2 = -4
طرح	نطرح ونفس الاشارة	6 – 2 = 4 -6 – (-2) = -4	نجمع الاول مع معكوس الثاني	6 – (-2) = 8 - 6 – 2 = -8
ضرب	نضرب والاشارة(+)	5 × 5 =25 -5 × -5 = 25	نضرب والاشارة(-)	-5 × 5 = - 25
قسمة	نقسم والاشارة (+)	5 / 5 = 1	نقسم و الاشارة (-)	5/-5 = -1

التقريـــب :

- **إلى اقرب عدد صحيح : (نحذف الفاصلة تماما")**

إذا كان العدد x يمين الفاصلة : $5 \geq x$ فإننا نضيف واحد على العدد الصحيح ونحذف الفاصلة و ما بعدها ، أما إذا كان $5 < x$ فإننا نبقي الرقم كما هو ونحذف الفاصلة و ما بعدها

مثال : قرب الاعداد التالية إلى اقرب عدد صحيح

- **23,7**

نلاحظ العدد بجانب الفاصلة: $5 \geq 7$ إذا" التقريب هو 24

- **12,3**

نلاحظ العدد بجانب الفاصلة $5 < 3$ إذا" التقريب هو 12

- **إلى اقرب جزء من عشرة : (يتبقى خانة واحده فقط يمين الفاصلة)**

نلاحظ العدد يمين الفاصلة ، في الخانة الثانية إذا كان $5 \geq x$ فإننا نضيف واحد على العدد في الخانة الاولى ونحذف الاعداد على يمينها اما اذا كانت $5 < x$ تبقى الخانة الاولى كما هي ويحذف الاعداد على يمينها

مثال : قرب الاعداد التالية إلى اقرب جزء من عشرة

- **23,72**

نلاحظ $5 < 2$ إذا" التقريب هو 23,7

- **12,36**

نلاحظ $5 \geq 6$ إذا" التقريب هو 12,4

- **إلى اقرب جزء من مئة : (يتبقى خانتين يمين الفاصلة)**

نلاحظ الاعداد يمين الفاصلة ، في الخانة الثالثة إذا كانت $5 \geq x$ فإننا نضيف واحد على العدد في الخانة الثانية ونحذف الاعداد على يمينها اما اذا كانت $5 < x$ تبقى الخانة الثانية كما هي ويحذف الاعداد على يمينها

مثال : قرب الاعداد التالية إلى اقرب جزء من مئة

- **23,724**

نلاحظ 4 اصغر من 5 إذا" التقريب هو 23,72

- **12,365**

نلاحظ ان العدد هو 5 إذا" التقريب هو 12,37

و هكذا بنفس السياق الالوف ، مئات الالوف .... الخ

☼ الضـرب :

×	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

طرق الضرب في اعداد كبيرة :

١- الطريقة العمودية (التقليدية):

أوجدْ ناتجَ الضربِ: ١٦٥ × ٣١ قدِّرْ ٢٠٠ × ٣٠ = ٦٠٠٠

الخطوةُ ١: اضربِ الآحادَ

١٦٥
× ٣١
١٦٥

١٦٥ × ١ = ١٦٥

الخطوةُ ٢: اضربِ العَشراتِ

١٦٥
× ٣١
١٦٥
٤٩٥٠

١٦٥ × ٣٠ = ٤٩٥٠

الخطوةُ ٣: اجمعْ

١٦٥
× ٣١
١٦٥
+ ٤٩٥٠
٥١١٥

١٦٥ + ٤٩٥٠ = ٥١١٥

وهذه افضل طريقة موجودة حيث تناسب جميع الاعداد مهما كبرت قيمتها

و للإستزادة فقط سنعرض بعض عمليات الضرب المبتكرة :

٢- طريقة أخرى :

$$\begin{array}{r} 1\ \ 2 \\ \underline{1\ \ 3\ \times} \\ \dots 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3+2 \\ 1\ \ 2 \\ \underline{1\ \ 3\ \times} \\ \dots 56 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\ \ 2 \\ \underline{1\ \ 3\ \times} \\ 156 \end{array}$$

نضرب الآحاد في الآحاد ويكون اول خانه ، و اذا كان العدد من رقمين الرقم الثاني يرتفع .

نقوم بالضرب التبادلي ثم نجمع الناتجين والعدد المرتفع إن وجد ، ويكون هو الخانة الثانية واذا كان الناتج من رقمين يرتفع الرقم الثانى

نضرب العشرات في العشرات ونجمع معهم العدد المرتفع ان وجد ويكون الخانة الأخيرة

مثال آخر :

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1\ \ 6 \\ \underline{1\ \ 4\ \times} \\ \dots 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1\ \ \ 2 \\ 4+6 \\ 1\ \ 6 \\ \underline{1\ \ 4\ \times} \\ \dots 24 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ 1\ \ 6 \\ \underline{1\ \ 4\ \times} \\ 224 \end{array}$$

مثال :

$$\begin{array}{r} 5\ \ 2 \\ \underline{3\ \ 4\ \times} \\ \dots 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2 \\ 20+6 \\ 5\ \ 2 \\ \underline{3\ \ 4\ \times} \\ \dots 68 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 2 \\ 5\ \ 2 \\ \underline{3\ \ 4\ \times} \\ 1768 \end{array}$$

مثال :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9\ \ 7 \\ \underline{8\ \ 2\ \times} \\ \dots 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 7\ \ \ 1 \\ 18+56 \\ 9\ \ 7 \\ \underline{8\ \ 2\ \times} \\ \dots 54 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 7 \\ 9\ \ 7 \\ \underline{8\ \ 2\ \times} \\ 7954 \end{array}$$

طريقة سريعة لضرب عددين متطابقين بشرط آحادهما 5 :

الخانتين الاولى دائما" 25 والخانة الأخرى نضرب العدد في العشرات في العدد الذي يليه

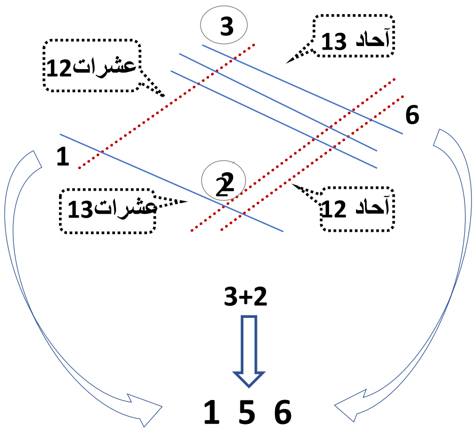
$$a5 \times a5 = [(a+1) \times a]\ 25$$

$$\underbrace{25 \times 25}_{5 \times 5} = \dots 25 \rightarrow \overset{1+}{}\underbrace{25 \times 25}_{3 \times 2} = 625$$

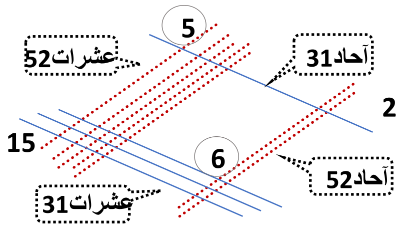
$$\underbrace{85 \times 85}_{5 \times 5} = \dots 25 \rightarrow \overset{1+}{}\underbrace{85 \times 85}_{9 \times 8} = 7225$$

٣- الطريقة اليابانية: (تعتمد على رسم خطوط مستقيمة ونحسب عدد تقاطعاتها)

- 12 × 13



- 52 × 31

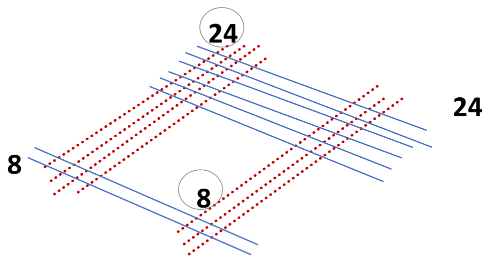


5+6

أي ناتج من رقمين (ينزل الرقم الأول في الناتج (1) و نجمع الرقم الثاني مع الخانة التالية) 1+15= 16

1 6 1 2

- 44 × 26



أي ناتج من رقمين (ينزل الرقم الأول في الناتج (4) و نجمع الرقم الثاني مع الخانة التالية) 2+(8+24) = 34

ينزل 4 في الناتج ويجمع 3 مع الخانة التالية 8+3=11

2+(8+24)

1 1 4 4

☼ القسمـة :

النـاتـج

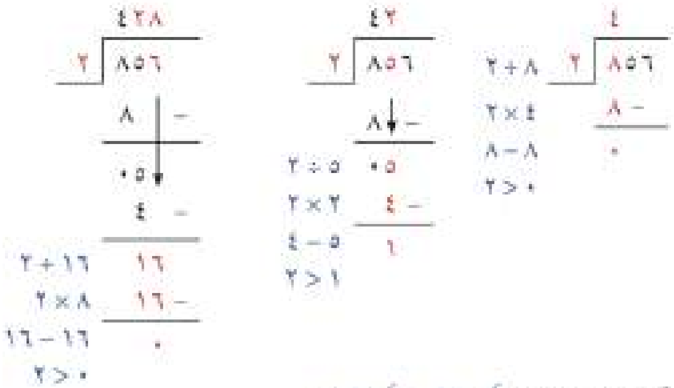
المقسوم | المقسوم عليه

أوجِدْ ناتجَ ٨٥٦ ÷ ٢ قدِّر: ٩٠٠ ÷ ٢ = ٤٥٠

الخطوةُ ١: اقسِم المئاتِ

الخطوةُ ٢: أنزل العَشَراتِ، اقسِم العَشَراتِ

الخطوةُ ٣: أنزل الآحادَ، اقسِم الآحادَ

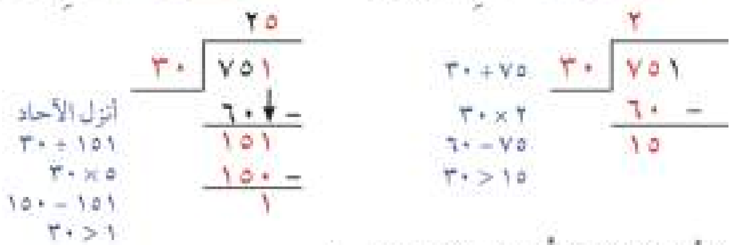


ناتجُ القسمةِ ٤٢٨ قارن الإجابةَ بالتقديرِ.

أوجِدْ ناتجَ وباقيَ قسمةِ ٧٥١ ÷ ٣٠ قدِّر: ٧٥٠ ÷ ٣٠ = ٢٥

الخطوةُ ١: اقسِم العَشَراتِ

الخطوةُ ٢: اقسِم الآحادَ



إذَنْ ٧٥١ ÷ ٣٠ تُساوي ٢٥ والباقي ١

♥ إذا كان المقسوم عليه اكبر من المقسوم فسيكون النـاتج عدد عشري :

50 | 30

لا يوجد أي عدد يضرب في 50 و يكون الناتج 30 لذلك نزيد صفر الى المقسوم لكي يصبح اكبر و نضيف فاصلة إلى الناتج ثم نكمل القسمة بنفس الطريقة السابقة

0 ,

50 | 300

0 , 6

50 | 300

\- 300

0

نـاتج قسمة 50 على 30 يساوي: 0.6

الملزمة مجانية لا احلل الاستفاده منها مادياً @my__ideas

♣ خطوات العملية الحسابية :

١ - احسب القيمة داخل الأقواس ، ٢ - احسب جميع القوى

٣ - اضرب أو اقسم من اليسار إلى اليمين(E) او من اليمين الى لليسار اذا كان (ع)

٤ - اجمع أو اطرح من اليسار إلى اليمين(E) او من اليمين لليسار(ع)

مثال: ▪ $(6-3)^2 + \frac{8}{4} - 3 = ????$

$\rightarrow (3)^2 + \frac{8}{4} - 3 = 9 + \frac{8}{4} - 3 = 9+2-3 = 8$

▪ $1 - 13 \times 2^2 + 49 \div 7 = ????$

$1 - 13 \times 4 + 49 \div 7 =$

$1 - 52 + 7 = -51 + 7 = -44$

قابلية القسمة للأعداد :

القسمة على العدد	الشرط	مثال
2	احاده زوجي او صفر	154 ، 120
3	مجموع خاناته من مضاعفات 3	168 ،،، 8+6+1=15
5	احاده 5 او صفر	2365 ، 350

قواسم و مضاعفات الأعداد :

العدد	القاسم	المضاعف
س .... ص	**إذا كان العدد س يقسم العدد ص بدون باقي سمي العدد س قاسما للعدد ص**	**وبذلك يسمى العدد ص مضاعف من مضاعفات العدد س**
س=4 ص=12	**12/4 = 3 العدد 4 قاسم للعدد 12**	**العدد 12 مضاعف من مضاعفات 4 ... 4,8,12,16....**

القاسم المشترك الأكبر : هو أكبر عدد يقسم عددين معاً بدون أي باقي .

ولإيجاده نفكك العدد الى عوامله الاولية . ونستخرج المشتركة ونضربها

◀مثال: اوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 270 ، 198

198	2
99	3
33	3
11	11
1	

270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

> **إرشادات للدراسة**
> **GCF**
> الرمز (GCF) يمثل اختصارًا لـ:
> Greatest Common Factor
> (العامل) (القاسم) المشترك الأكبر)

$$198 = 2 \times 3^2 \times 11 \quad . \quad 270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

$$GCF = 2 \times 3^2 = 18$$

المضاعف المشترك الاصغر: هو أصغر عدد مضاعف لكلا هذين العددين .ولإيجاده نفكك العدد الى عوامله الأولية . ونضربها جميعا المشتركة والغير مشتركة بحيث اذا وجد مشترك نأخذ العدد ذو الأس الاكبر فقط .

مثال : اوجد المضاعف المشترك الاصغر

للعددين 350 ... 180

> **إرشادات للدراسة**
> **LCM**
> الرمز (LCM) يمثل اختصارًا لـ:
> Least Common Multiple
> (المضاعف المشترك الأصغر)

350	2
175	5
35	5
7	7
1	
$350 = 2\times5^2\times7$	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	
$180=2^2 \times 3^2 \times 5$	

$$LCM = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 6300$$

عملية القوى (الأسس) :

هي عملية ضرب عدد في نفسه ، عدة مرات

$$\underbrace{a \times a \times a \times a \ldots \ldots \ldots \times a}_{m \text{ مرات}} = a^m$$

الأس

$$a^m$$

الأساس

خصائص الأسس :

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \times x^b = x^{a+b}$	$3^2 \times 3^4 = 3^6$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ $X \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$
لأس السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a} = \frac{1}{x^{-a}} = x^a$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^2)^3 = 3^6$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$
قوة ناتج القسمة	$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a} \quad , y \neq 0$ $(\frac{x}{y})^{-a} = (\frac{y}{x})^a = \frac{y^a}{x^a}$	$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$ $(\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{3}{2})^2 = \frac{3^2}{2^2}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1$ $x \neq 0$	$7^0 = 1$

اسس مشهورة ، في مسائل القوى وتبسيطها :

الأسس

الأساس

a^b	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	9	27	81	243	729				
4	16	64	256	1024					
5	25	125	625						
6	36	216							
7	49	343							
8	64	512							
9	81	729							

☼إذا كان لدينا قيمتان اسيتان (متساويتان) وكان اساسهما نفسه فإن اسسها متساوية ايضاً .

والعكس صحيح إذا كانت الاسس متساوية فإن الاساس متساوي .

مثال : اوجد قيمة a فيما يلي :

$$\circledast \quad 4^a = (16^2)^3$$

نعلم ان ($16 = 4^2$) إذا" نكتبها بهذه الطريقة (لكي نساوي الاساسين) :

$$4^a = ((4^2)^2)^3$$

نطبق قوانين الاسس (قوة القوة)

$$4^a = 4^{2\times2\times3} \quad \rightarrow \quad 4^a = 4^{12}$$

وبما ان الأساس متساوي إذا" الاسس متساوية ايضا" وبذلك : a=12

$$\circledast \quad \frac{a^2}{a^3} = 4$$

قانون قسمة القوى $\quad a^{-1} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$

قانون الاس السالب $\quad \frac{1}{a} = 4 \quad \rightarrow \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$

نقلب الكسرين لأننا نريد قيمة a : $\quad a = \frac{1}{4}$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{1}{n}}$)

التعبير اللفظي: لأيّ عدد حقيقي b ، وأيّ عدد صحيح موجب n ، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ ، إلا إذا كانت $b < 0$ ، و n عددًا زوجيًا فإن الجذر النوني يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-16} = 4i$ ، $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الأسس النسبية ($b^{\frac{x}{y}}$)

التعبير اللفظي: يكون $b^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{b^x} = \left(\sqrt[y]{b}\right)^x$ لأيّ عدد حقيقي b لا يساوي صفرًا ، ولأي عددين صحيحين x, y بحيث $y > 1$، إلا إذا كانت $b < 0$ و y عددًا زوجيًا، فإن الجذر قد يكون عددًا مركبًا.

مثالان: $(-16)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{-16}\right)^3 = (4i)^3 = -64i$ $\quad 27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$

أوجد قيمة كلّ عبارة مما يأتي:

a) $81^{-\frac{1}{4}}$

$$81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} \qquad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{81}} \qquad 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{3^4}} \qquad 81 = 3^4$$

$$= \frac{1}{3} \qquad \text{بسّط}$$

b) $216^{\frac{2}{3}}$

$$216^{\frac{2}{3}} = (6^3)^{\frac{2}{3}} \qquad 216 = 6^3$$

$$= 6^{3 \cdot \frac{2}{3}} \qquad \text{خاصية قوة القوة}$$

$$= 6^2 \qquad \text{ضرب الأسس}$$

$$= 36 \qquad \text{بسّط}$$

مثال 4 تبسيط عبارات بأسس نسبية

بسّط كلّ عبارة مما يأتي:

a) $a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}}$

$$a^{\frac{2}{7}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{7}+\frac{4}{7}} \qquad \text{خاصية ضرب القوى}$$

$$= a^{\frac{6}{7}} \qquad \text{جمع الأسس}$$

b) $b^{-\frac{5}{6}}$

$$b^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \qquad b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$= \frac{1}{b^{\frac{5}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}} \qquad \text{اضرب في } \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}}$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{6}{6}}} \qquad b^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{6}} = b^{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{b^{\frac{1}{6}}}{b} \qquad b^{\frac{6}{6}} = b^1 = b$$

الجذور : **هي عملية عكسية للقوى (الاسس) :**

بحيث أن : $\sqrt{a} = b \quad \rightarrow \quad b^2 = a$

$$\sqrt{81} = 9 \quad \rightarrow \quad 9^2 = 81$$

 # في أي معادلة تحتوي على جذر نستطيع التخلص منه بالتربيع (وعند تربيع طرف يلزم تربيع الطرف الآخر دائما")

مثال : اوجد قيمة a :

$$\sqrt{a} = 8 \quad \rightarrow \quad (\sqrt{a})^2 = 8^2 \quad \rightarrow \quad a = 64$$

كل جذر موجب له حلان موجب و سالب : $\sqrt{169} = \mp 13$

الجذر النوني :

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$$

$$\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

ضرب وقسمة الجذور :

مفهوم أساسي — خاصية ضرب الجذور — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيّ عددين حقيقيين a, b ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$، فإن $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ إذا كانت n عددًا زوجيًا وكان a, b عددين غير سالبين أو إذا كان n عددًا فرديًا.

مثالان: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

وعند ضرب أي جذرين ما تحتهما متشابه فإن الجذر يحذف ويبقى ما تحته :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5$$

مفهوم أساسي — **خاصية قسمة الجذور** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيّ عددين حقيقيين a, b، حيث $b \neq 0$ ولأيّ عدد صحيح n حيث $n > 1$،
فإن $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$، إذا كانت جميع الجذور معرّفة.

مثالان: $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$ ، $\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

عند تبسيط الاعداد يجب التخلص من جذور المقام بحيث نستخدم عملية

انطاق المقام : وهي (ضرب بسط ومقام العدد بالجذر الذي يوجد في المقام)

مثال:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

نضرب بسط ومقام العدد بجذر 5 لكي نتخلص من الجذر
لان (ضرب الجذر في نفسه يعطينا ما تحت الجذر)

وإذا كان المقام حدين نضرب في مرافق المقام :

$$a\sqrt{b} + c\sqrt{d} \quad \rightarrow \quad a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$$

◄ استعمل المرافق في إنطاق المقام :

بسط العبارة : $\frac{3}{5+\sqrt{2}}$

$$= \frac{3}{5+\sqrt{2}} \times \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{25-2}$$

$$= \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$$

▪ بسط $\sqrt{80}$

$$= \sqrt{5 \times 16} = 4\sqrt{5}$$

▪ بسط العبارة : $\sqrt{2} \times \sqrt{14}$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

مثال 1 إيجاد الجذور

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\pm\sqrt{16y^4}$

$$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$$
$$= \pm 4y^2$$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b) $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$$
$$= -(x^2-6)^4$$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$$
$$= 3a^4b^5$$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d) $\sqrt[7]{128}$

$$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$$

الجذر السابع لـ 128 هو 2

بسّط كلًّا مما يأتي:

a) $\sqrt{\frac{x^6}{y^7}}$

$\sqrt{\frac{x^6}{y^7}} = \frac{\sqrt{x^6}}{\sqrt{y^7}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2 \cdot y}}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \frac{\sqrt{(x^3)^2}}{\sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{y}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}}$ بسّط

$= \frac{|x^3|}{y^3\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$ إنطاق المقام

$= \frac{|x^3|\sqrt{y}}{y^4}$ $\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} = y$

b) $\sqrt[4]{\frac{6}{5x}}$

$\sqrt[4]{\frac{6}{5x}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}}$ خاصية قسمة الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{5x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3x^3}}{\sqrt[4]{5^3x^3}}$ إنطاق المقام

$= \frac{\sqrt[4]{6 \cdot 5^3x^3}}{\sqrt[4]{5x \cdot 5^3x^3}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{\sqrt[4]{5^4x^4}}$ اضرب

$= \frac{\sqrt[4]{750x^3}}{5x}$ $\sqrt[4]{5^4x^4} = 5x$

ملخص المفاهيم

تبسيط العبارات الجذرية

أضف إلى مطويتك

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب على صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسوراً.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

العمليات على العبارات نستخدام خواص الضرب والقسمة على الجذور:

مثال 3 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية: $5\sqrt[3]{-12ab^4}\cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2}$.

$5\sqrt[3]{-12ab^4}\cdot 3\sqrt[3]{18a^2b^2} = 5\cdot 3\cdot \sqrt[3]{-12ab^4\cdot 18a^2b^2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15\cdot \sqrt[3]{-2^2\cdot 3\cdot ab^4\cdot 2\cdot 3^2\cdot a^2b^2}$ حلّل الثوابت

$= 15\cdot \sqrt[3]{-2^3\cdot 3^3\cdot a^3b^6}$ جمّع العوامل في صورة أسس تكعيبية

$= 15\cdot \sqrt[3]{-2^3}\cdot \sqrt[3]{3^3}\cdot \sqrt[3]{a^3}\cdot \sqrt[3]{b^6}$ خاصية ضرب الجذور

$= 15\cdot (-2)\cdot 3\cdot a\cdot b^2$ بسّط

$= -90ab^2$ اضرب

مثال 5 ضرب العبارات الجذرية

بسّط العبارة الجذرية $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6)$.

$(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})(3\sqrt{2}-6) = 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\cdot(-6) + 5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\cdot(-6)$ خاصية التوزيع

$= 12\sqrt{3\cdot 2} - 24\sqrt{3} + 15\sqrt{2^2} - 30\sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 12\sqrt{6} - 24\sqrt{3} + 30 - 30\sqrt{2}$ بسّط

يمكنك جمع العبارات الجذرية وطرحها بالأسلوب المستعمل عند جمع وحدات الحد أو طرحها، ولكن بشرط أن تكون **الجذور متشابهة**؛ أي أن يكون للجذور الدليل نفسه وما تحت الجذور المقادير نفسها.

متشابهان: $\sqrt{3b}$ و $4\sqrt{3b}$ | غير متشابهين: $\sqrt{3b}$ و $\sqrt[3]{3b}$ | غير متشابهين: $\sqrt{2b}$ و $\sqrt{3b}$

مثال 4 جمع العبارات الجذرية وطرحها

بسّط العبارة الجذرية: $\sqrt{98}-2\sqrt{32}$.

$\sqrt{98}-2\sqrt{32} = \sqrt{2\cdot 7^2} - 2\sqrt{4^2\cdot 2}$ حلّل ما يمكن تحليله إلى عوامل مربعة

$= \sqrt{7^2}\cdot\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{2}$ خاصية ضرب الجذور

$= 7\sqrt{2} - 2\cdot 4\cdot\sqrt{2}$ بسّط العبارات الجذرية

$= 7\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$ اضرب

$= -\sqrt{2}$ $(7-8)\sqrt{2} = (-1)(\sqrt{2})$

☼ طريقة مميزة لاستخراج الجذر للمربعات الكاملة بدون آلة حاسبة : ((للاستزادة فقط))

المربع الكامل: عدد صحيح مربع لعدد صحيح آخر مثل (...9,16,25)

الجدول الأساسي للمربعات الكاملة :

العدد	1	4	9	16	25	36	49	64	81
الجذر	1	2	3	4	5	6	7	8	9

آحاد العدد 6 ، إذ"
آحاد جذره إما 6 أو 4

آحاد العدد 9 ، إذ" آحاد جذره إما 3 أو 7

آحاد العدد 4 ، إذ" آحاد جذره إما 2 أو 8

آحاد العدد 1 ، إذ" آحاد جذره إما 1 أو 9

ملاحظة : مجموع أي عددين =10

أمثـلـه * اوجد الجذر التربيعي للأعداد التالية :

- { 12/25 } : اولاً" نتجاهل العشرات ،، ثم نلاحظ العدد على اليسار 12 نبحث في الجدول الاساسي عن جذره ، اذا لم نجد نأخذ العدد الأقرب (الاصغر من 12) ،، العدد هو 9 وجذره 3 إذاً" عشرات الجذر سيكون $\boxed{3}$ ،
وبما ان آحاد العدد 5 ، إذاً" مباشرة نعرف ان آحاد الجذر سيكون $\boxed{5}$
الحل : $\sqrt{1224} = 35$

- { 16/81 } : نتجاهل العشرات ،، ثم نلاحظ العدد على اليسار 16 نبحث في الجدول الاساسي عن جذره وهو 4 ، إذاً" عشرات الجذر التربيعي سيكون $\boxed{4}$
احاد العدد 1 ، إذاً" احاد الجذر التربيعي سيكون إما 1 أو 9 و لتحديده نضرب 4 في العدد الذي يليه (5) $4 \times 5 = 20 > 16$ ، 16 اصغر من الناتج إذاً" آحاد العدد سيكون الاصغر 1 $\boxed{}$ الحل : $\sqrt{1681} = 41$
.

- { 77/44 } : 77 لا يوجد له جذر و اقرب عدد له 64 جذره 8 ، إذاً" عشرات العدد $\boxed{8}$ ، احاد الجذر سيكون إما 2 أو 8 و لتحديده : $8 \times 9 = 72 < 77$
، العدد 77 اكبر من الناتج إذاً" نختار الاكبر $\boxed{8}$ الحل : $\sqrt{7744} = 88$

- {1/69} : احاد الجذر التربيعي سيكون اما 3 او 7 ، نلاحظ العدد المتبقي 1 وجذره 1 إذاً" عشرات العدد سيكون $\boxed{1}$ ، لتحديد احاده $1 \times 2 = 2 > 1$ ،
بما ان العدد 1 اصغر من الناتج نحتار العدد الاصغر ليكون الاحاد $\boxed{3}$
الحل : $\sqrt{169} = 13$

جميع المربعات الكاملة آحادها
(1 , 4, 5 ,6 , 9)

☼ طريقة استخراج الجذر لأي عدد اصغر من 100 بدون آلة حاسبة :

$$\sqrt{x} = \frac{x+y}{2\sqrt{y}}$$

حيث y هو اقرب مربع كامل ل x (سواء اكبر او اصغر)

امثله : اوجد الجذور التالية ؟

$$\sqrt{24} = \frac{24+25}{2\sqrt{25}} = \frac{49}{10} = 4.9$$

$$\sqrt{72} = \frac{72+64}{2\sqrt{64}} = \frac{136}{16} = 8.5$$

$$\sqrt{51} = \frac{51+49}{2\sqrt{49}} = \frac{100}{14} = 7.14$$

$$\sqrt{30.5} = \frac{30.5+36}{2\sqrt{36}} = \frac{66.5}{12} = 5.54$$

$$\sqrt{92.2} = \frac{92.2+81}{2\sqrt{81}} = \frac{173.2}{18} = 9.6$$

$$\sqrt{0.7} = \frac{0.7+1}{2\sqrt{1}} = \frac{1.7}{2} = 0.85$$

يمكن تجربة العديد من الارقام ومقارنتها بالآلة الحاسبة سنلاحظ التقارب الكبير بين الحلين

الكسور (الاعداد النسبية) :

الكَسْرُ عَدَدٌ يُمَثِّلُ جُزْءًا مِنْ كُلٍّ أَوْ جُزْءًا مِنْ مَجْموعَةٍ.

مثال: إذا قُسِّمَتْ فَطيرَةٌ إلى ٨ أَجْزاءٍ مُتَساوِيَةٍ، فَإِنَّ كُلَّ جُزْءٍ يُسَمّى ثُمُنًا أَوْ واحِدًا مِنْ ثَمانِيَةٍ.

$\frac{A \leftarrow \text{البسط}}{B \leftarrow \text{المقام}}$ **حيث يدل البسط على الجزء والمقام على الكل**

- **مثال : اوجد نسبة المظلل في الشكل ؟**

الشكل مقسم الى عدة اجزاء متساوية ، لذلك نستطيع ايجاد النسبة بسهولة ، الحل سيكون على شكل كسر بسطه (الجزء المطلوب): 8 ، ومقامه عدد جميع الاجزاء في الشكل : 16

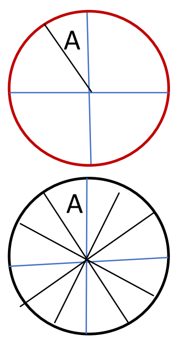
$$\frac{8}{16} = \frac{\cancel{8} \times 1}{\cancel{8} \times 2} = \frac{1}{2}$$

لإيجاد النسبة يجب تبسيط الكسر الى ابسط شكل : إذا" الحل هو $\frac{1}{2}$

الكسرين $\frac{8}{16}, \frac{1}{2}$ تسمى كسور متكافئة ، حيث تمثل نفس المقدار .
(عند ضرب او قسمة حدّي النّسبة في نفس العدد بشرط ألّا يكون صفراً، فإنّ قيمة النّسبة **لا تتغيّر.**)

مثال $\frac{6}{15} = \frac{2\times3}{5\times3} = \frac{2}{5}$ ، مثال $\frac{1}{3} = \frac{3\div3}{9\div3} = \frac{3}{9}$

- **اوجد نسبة الشكل A الى الدائرة ؟**



نقسم الشكل الى اجزاء متساوية بنفس حجم الشكل المطلوب .....

عدد الاجزاء المتساوية 12 إذا" الحل : $\frac{1}{12}$

العَدَدُ الكَسْرِيُّ: يَتَكَوَّنُ مِنْ جُزْأَيْنِ؛ عَدَدٍ صَحِيحٍ وَكَسْرٍ.

الكَسْرُ غَيْرُ الفِعْلِيِّ: كَسْرٌ بَسْطُهُ أَكْبَرُ مِنْ مَقامِهِ أَوْ يُساوِيهِ.

أعدادٌ كسريّةٌ	كسورٌ غيرُ فعليّةٍ
$١\frac{١}{٢}$ $٢\frac{٣}{٤}$ $٣\frac{٥}{٦}$	$\frac{٣}{٢}$ $\frac{١١}{٤}$ $\frac{٢٣}{٦}$

مثـــالان التّحويلُ مِنْ عَدَدٍ كَسْرِيٍّ إلى كَسْرٍ غيرِ فعليٍّ

تذكّر
يقومُ خطُّ الكسرِ مقامَ القسمةِ. $\frac{١١}{٨}$ تعني ١١ قسمة ٨.

١ اكْتُبْ $١\frac{٣}{٨}$ على شكلِ كَسْرٍ غيرِ فِعْلِيٍّ.

$١\frac{٣}{٨} = ١ + \frac{٣}{٨}$ اكْتُبِ العَدَدَ الكَسْرِيَّ على شَكْلِ مَجْموعِ عَدَدٍ وكَسْرٍ

$= \frac{٨}{٨} + \frac{٣}{٨}$ اكْتُبِ العَدَدَ الصحيحَ على شكلِ كَسْرٍ

$= \frac{٨ + ٣}{٨}$ اجمعْ

$= \frac{١١}{٨}$

باختصار : نضرب العدد في المقام ، ثم نجمع معه البسط

$$1\frac{3}{8} = \frac{8 \times 1 + 3}{8} = \frac{11}{8}$$

٢ اكْتُبْ $\frac{١١}{٨}$ على شكلِ عَدَدٍ كَسْرِيٍّ.

العَدَدُ الصحيحُ ← ١

المقامُ ← ٨) ١١

-٨

البَسْطُ ← ٣

إذَنْ $\frac{١١}{٨} = ١\frac{٣}{٨}$

- **جمع وطرح الكسور :**

لجمع أعداد نسبية ذات مقامات متشابهة، اجمع أو اطرح البسوط، واكتب الناتج فوق المقام نفسه.

أعداد	جبر
$\frac{١}{٥} + \frac{٣}{٥} = \frac{٤}{٥}$	$\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$ ، جـ ≠ صفر
$\frac{٧}{٨} - \frac{٣}{٨} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$	$\frac{أ}{جـ} - \frac{ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{جـ}$ ، جـ ≠ صفر

أوجد الناتج في أبسط صورة:

المقامات مختلفة نوحدها

$\frac{١}{٤} + \left(-\frac{٢}{٣}\right)$

$\frac{١}{٤} + \left(-\frac{٢}{٣}\right) = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٣} + \left(-\frac{٢}{٣}\right) \times \frac{٤}{٤}$ (م . م . أ) للمقامين هو ٣ × ٤ ،

$= \frac{٣}{١٢} + \left(-\frac{٨}{١٢}\right)$ اكتب الكسرين باستعمال (م . م . أ)

$= \frac{٣ + (-٨)}{١٢} = \frac{-٥}{١٢}$ اجمع البسطين.

أوجد ناتج $-٦\frac{٢}{٩} + ٤\frac{٥}{٦}$ في أبسط صورة.

الاعداد الكسرية تحول كسور

$-٦\frac{٢}{٩} + ٤\frac{٥}{٦} = -\frac{٥٦}{٩} + \frac{٢٩}{٦}$ $-٦\frac{٢}{٩} = \frac{-٥٦}{٩}$ ، $٤\frac{٥}{٦} = \frac{٢٩}{٦}$.

$= -\frac{١١٢}{١٨} + \frac{٨٧}{١٨}$ $\frac{-٥٦}{٩} \times \frac{٢}{٢} = -\frac{١١٢}{١٨}$ ، $\frac{٢٩}{٦} \times \frac{٣}{٣}$

$= \frac{-١١٢ + ٨٧}{١٨}$ اجمع البسطين.

$= \frac{-٢٥}{١٨} = -١\frac{٧}{١٨}$ بسّط.

- **ضرب الكسور :**

نضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$$\frac{5}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{10}{21}$$

أوجد ناتج $٤\frac{١}{٢} \times ٢\frac{٢}{٣}$، واكتبه في أبسط صورة.

قدّر: $٤ \times ٣ = ١٢$

$٤\frac{١}{٢} \times ٢\frac{٢}{٣} = \frac{٩}{٢} \times \frac{٨}{٣}$ $\qquad ٤\frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$ ، $٢\frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$.

الاعداد الكسرية تحول كسور

$= \frac{\cancel{٩}^{٣}}{\cancel{٢}_{١}} \times \frac{\cancel{٨}^{٤}}{\cancel{٣}_{١}}$ اقسم على القواسم المشتركة.

$= \frac{٣ \times ٤}{١ \times ١}$ ← اضرب البسطين. ← اضرب المقامين.

$= \frac{١٢}{١} = ١٢$ بسّط، وقارن الناتج بالتقدير.

- **قسمة الكسور :**

نحول القسمة الى ضرب ونقلب الكسر الثاني (النظير الضربي)

أوجد ناتج القسمة في أبسط صورة:

$-\frac{٤}{٥} \div \frac{٦}{٧}$

$-\frac{٤}{٥} \div \frac{٦}{٧} = -\frac{٤}{٥} \times \frac{٧}{٦}$ اضرب في النظير الضربي للعدد $\frac{٦}{٧}$، وهو $\frac{٧}{٦}$.

$= -\frac{\cancel{٤}^{٢}}{٥} \times \frac{٧}{\cancel{٦}_{٣}}$ اقسم العددين – ٤ ، ٦ على قاسمهما المشترك الأكبر (٢)

$= -\frac{١٤}{١٥}$ اضرب.

- **رتب الكسور التالية من الأصغر للأكبر :** $\frac{6}{10}, \frac{8}{24}, \frac{3}{12}$

للمقارنة بين الكسور نقوم بتوحيد المقامات ثم ملاحظة العدد الذي يكون بسطه اصغر فهو العدد الاصغر (يفضل تبسيط الكسر قبل توحيد المقامات لكي يسهل الامر)

$$\frac{6}{10} = \frac{2\times3}{2\times5} = \frac{3}{5} \quad ▪ \quad \frac{8}{24} = \frac{8\times1}{8\times3} = \frac{1}{3} \quad ▪ \quad \frac{3}{12} = \frac{3\times1}{3\times4} = \frac{1}{4}$$

من خلال النظر نستطيع ملاحظة الاصغر(حيث انه كلما كان الفرق بين البسط المقام بمقدار اكبر من غيره يكون هو العدد اصغر)

حيث ان $\frac{1}{4}$ مقامه 4 اضعاف البسط و $\frac{1}{3}$ مقامه 3 اضعاف البسط.
حيث
و $\frac{3}{5}$ مقامه حوالي ضعفي البسط إذا" $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{3}{5}$

الملزمة مجانية لا احلل الاستفاده منها مادياً @my__ideas

واذا صعب الامر نقوم بتوحيد المقامات لإيجاد لحل الدقيق (نوجد المضاعف المشترك الاصغر للأعداد في المقام) 3, 4, 5 لا توجد بينهم اعداد مشتركة لذلك نضربهم في بعض 60 =5×4×3 إذا" المقام 60 ، واي عدد نضربه في المقام <u>يجب ضربه في البسط</u>

$$\frac{3\ \times(3\times4)}{5\ \times(3\times4)}\ ,\quad \frac{1\ \times(4\times5)}{3\ \times(4\times5)}\ ,\quad \frac{1\ \times(3\times5)}{4\ \times(3\times5)}$$

$$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{3}{5}\quad\rightarrow\quad \frac{15}{60}<\frac{20}{60}<\frac{36}{60}$$

الكسور العشرية : اعداد تستخدم فيها الفاصلة العشرية والقيمة المنزلية لتمثل جزء من كل.

تعتمدُ الكسورُ العشريةُ على الأساسِ عشرةٍ. و تكونُ المنزلةُ عن يمينِ الآحادِ في جدولِ المنازلِ العشريةِ جزءًا من عشرةٍ، و المنزلةُ التي تليها جزءًا من مئة والتي تليها جزءا" من الف وهكذا

مـثـــال :

الكسر العشري	القراءة		الكسر	القراءة
0,5	5 من عشرة أو 5 اعشار		234,07	234 و 7 من مائة
4,6	4 و 6 من عشرة		1,15	1 و 15 من مائه
45,7	45 و 7 من عشرة		13,129	13 و 129 من الف

الكسور العشرية المتكافئة : عند إضافةُ صفرٍ أو أصفارٍ عن يمينِ آخرِ منزلةٍ عشريةٍ لا يغيرُ من قيمةِ الكسرِ العشري

ويساعدُ إضافةُ هذهِ الأصفارِ في ترتيبِ الكسورِ العشريَّةِ.

0,8 = 0,80 ، 2,14 = 2,14000

تحويل الكسور الاعتيادية الى عشرية و العكس :

اكتب الكسر $\frac{٥}{٨}$ على صورة كسر عشري.

$\frac{٥}{٨}$ تعني ٥ ÷ ٨

اقسم ٥ على ٨ .

```
   ٠,٦٢٥
٨ | ٥,٠٠٠
   ٤ ٨ -
   ----
     ٢٠
    ١٦-
   ----
     ٤٠
    ٤٠-
   ----
      ٠
```

اكتب ٠,٤٥ على صورة كسر اعتيادي.

٠,٤٥ = $\frac{٤٥}{١٠٠}$ ٠,٤٥ تعني ٤٥ جزءًا من مئة جزء.

= $\frac{٩}{٢٠}$ بسّط.

مثـــال تقريبُ الكسورِ العشريّةِ

٢ قرّبِ العددَ ٤٦,٧٣ إلى أقربِ جزءٍ من عَشَرةٍ، وهل هو أقربُ إلى ٤٦,٧، أم إلى ٤٦,٨؟

الخُطوةُ ١: ضعْ خطًّا تحتَ الرقمِ في منزلةِ أجزاءِ العَشَرة. ٤٦,٧٣

الخُطوةُ ٢: انظرْ إلى الرقمِ ٣ الواقعِ عن يمينِ الرقمِ ٧ ٤٦,٧٣

الخُطوةُ ٣: إذا كانَ هذا الرقمُ أقلَّ من ٥، فلا تغيّرِ الرقمَ الذي تحتَهُ خطٌّ، بما أنّ ٣ < ٥، فإن الرقمَ ٧ يبقى كمَا هو. ٤٦,٧٣

الخُطوةُ ٤: احذفِ الرقمَ الواقعَ عن يمينِ الرقمِ الذي تحتَهُ خطٌّ. ٤٦,٧

جمع و طرح الكسور العشرية : نجمعُ الكسورَ العشريةَ ونطرحها كما نجمعُ و نطرحُ الأعدادَ؛ إذْ نجمعُ الأرقامَ في المنازلِ نفسِها. ولكي تجمعَ الكسورَ العشريةَ أو تطرحها، ابدأْ بترتيبها ، بحيثُ تكونُ الفواصلُ العشريّةُ بعُضها فوقَ بعضٍ ، ثمّ اجمعْ أو اطرحِ الأرقامَ وضعِ الفاصلةَ العشريّةَ في مكانها في الناتجِ.

لجمعِ أو طرحِ كسرينِ عشريينِ، ضعِ الفاصلتينِ العشريتينِ بعضُهما فوقَ بعضٍ، ثمَّ اجمعْ أو اطرحِ الأرقامَ في المنازلِ نفسِها.

مثالان جمعُ الكسورِ العشريةِ وطرحُها

١ أوجدْ ناتجَ جمعِ ٢٣,١ وَ ٥,٨

قدّر: ٢٣,١ + ٥,٨ ≈ ٢٣ + ٦ = ٢٩

٢٣,١	ضعِ الفاصلةَ فوقَ الفاصلةِ
٥,٨ +	
٢٨,٩	اجمعْ كما في جمعِ الأعدادِ الكليّةِ

قارنْ ناتجَ التقديرِ بالجوابِ الحقيقيّ لناتجِ الجمعِ. بما أنَّ ٢٨,٩ قريبةٌ من ٢٩ فالجوابُ معقولٌ.

ناتجُ جمعِ ٢٣,١ وَ ٥,٨ هو ٢٨,٩

مثـــال إضافةُ أصفارٍ عن يمينِ الكسرِ العشريّ

٢ أوجدْ ١٩,٦ − ٤,٣١

قدّر: ٢٠ − ٤ = ١٦

الخُطوةُ ١: رتّبِ الفواصلَ العشريّةَ بعضَها فوقَ بعضٍ، ثمّ أضفْ صفرًا حتى تتساوى منازلُ الكسرينِ. ١٩,٦٠ − ٠٤,٣١

الخُطوةُ ٢: اطرحِ الأرقامَ كما تطرحُ الأعدادَ من اليمينِ إلى اليسارِ، وأعدِ التجميعَ عندَ الضرورةِ. ١٩,٦٠ − ٠٤,٣١ = ١٥ ٢٩

الخُطوةُ ٣: ضعِ الفاصلةَ العشريّةَ في الناتجِ. ١٩,٦٠ − ٠٤,٣١ = ١٥,٢٩

ناتجُ الطرحِ يساوي ١٥,٢٩، بما أنّ ١٥,٢٩ قريبٌ من الإجابةِ التقديريّةِ، إذن الإجابةُ معقولةٌ.

ضرب الكسور العشرية :

أوجدْ ناتجَ: ١٤,٢ × ٦

الطريقة الأولى استعمالُ التقدير		الطريقة الثانية عدُّ المنازلِ العشرية	
قرِّبْ ١٤,٢ إلى ١٤		١٤,٢	منزلة عشرية واحدة
١٤,٢ × ٦ ⟵ ١٤ × ٦ = ٨٤		× ٦	عُدَّ منزلة واحدة عن اليمين، وضع الفاصلة.
١٤,٢ × ٦ = ٨٥,٢	بما أنَّ التقدير ٨٤، لذا ضع الفاصلة العشرية بعد الرقم ٥.	٨٥,٢	

لضربِ كسرٍ عشريٍّ في كسرٍ عشريٍّ آخرَ، اتبعْ طريقةَ ضربِ الأعدادِ الكليةِ نفسَها. ولمعرفةِ موقعِ الفاصلةِ العشريةِ، أوجدْ مجموعَ عددِ المنازلِ العشريةِ في العددينِ المضروبينِ فيكونُ لناتجِ الضربِ هذا العددُ نفسهُ منَ المنازلِ العشريةِ.

أوجدْ ناتجَ الضربِ: ٤,٢ × ٦,٧. **قدِّرْ:** ٤,٢ × ٦,٧ ⟵ ٤ × ٧ = ٢٨

٤,٢ ⟵ الفاصلةُ بعدَ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

× ٦,٧ ⟵ الفاصلةُ بعدَ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

٢٩٤

+ ٢٥٢٠

٢٨,١٤ ⟵ ضعِ الفاصلةَ بعدَ منزلتينِ عشريتينِ.

إذنْ ناتجُ الضربِ هوَ ٢٨,١٤ بمقارنةِ الناتجِ بالقيمةِ التقديريةِ، نجدهُ معقولاً

أوجدْ ناتجَ الضربِ: ١,٦ × ٠,٠٩ **قدِّرْ:** ١,٦ × ٠,٠٩ ⟵ ٢ × ٠ = صفرًا

١,٦ ⟵ الفاصلةُ بعدَ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ

× ٠,٠٩ ⟵ الفاصلةُ بعدَ منزلتينِ عشريتينِ

٠,١٤٤ ⟵ الفاصلةُ بعدَ ثلاثِ منازلَ عشريةٍ

لذا فإنَّ ناتجَ الضربِ يُساوي ٠,١٤٤ وبمقارنةِ الناتجِ بالقيمةِ التقديريةِ، نجدهُ معقولاً

عند ضرب عدد عشري في مضاعفات العشرة فإن الفاصلة تتحرك بمقدار خانة واحدة إلى اليمين مع كل صفر :

مثال : 10 × 4,236 = 42,36

100 × 4,236 = 423,6

1000 × 4,236 = 4236

10000 × 4,236 = 42360

القسمة في الكسور العشرية :

قسمةُ عددٍ كسريٍّ على عددٍ كليٍّ تشبهُ عمليةَ قسمةِ الأعدادِ الكليةِ تمامًا.

مثـــال قسمة كسرٍ عشريٍّ على عددٍ كليٍّ من منزلةٍ واحدةٍ

١ أوجدْ ناتجَ: ٦,٨ ÷ ٢ **قدِّرْ:** ٦ ÷ ٢ = ٣

٣,٤ ← ضعِ الفاصلةَ العشريةَ في ناتجِ القسمةِ فوقَ الفاصلةِ العشريةِ للمقسومِ
٢⟌٦,٨
− ٦
٠ ٨
− ٨
٠

لذا فإنَّ ٦,٨ ÷ ٢ = ٣,٤ وبمقارنةِ الناتجِ بالقيمةِ التقديريةِ نجدهُ معقولًا

أوجدْ ناتجَ: ٧,٧ ÷ ١٤ **قدِّرْ:** ٧ ÷ ١٤ = ٠,٥

← ٠,٥٥ ضعِ الفاصلةَ العشريةَ
١٤⟌٧,٧٠
− ٧ ٠ أضفْ صفرًا وأكملِ القسمةَ
٠ ٧٠
− ٧٠
٠٠

٧,٧ ÷ ١٤ = ٠,٥٥ وبمقارنةِ الناتجِ بالقيمةِ التقديريةِ، نجدهُ معقولًا

عندَ القسمةِ على كسرٍ عشريٍّ ، حوِّلِ المقسومَ عليهِ إلى عددٍ كليٍّ، وذلكَ بضربِ كل منَ المقسومِ والمقسومِ عليهِ في قوى العشرةِ نفسِها، ثمَّ اقسمْ كما في الأعدادِ الكليةِ.

مثـــال القسمةُ على كسورٍ عشريةٍ

أوجدْ ناتجَ: ١٤,١٩ ÷ ٢,٢ **قدِّرْ:** ١٤ ÷ ٢ = ٧

٢,٢⟌١٤,١٩ ← ٢٢⟌١٤١,٩٠

اضربِ المقسومَ عليهِ في ١٠ ليصبحَ عددًا كليًّا، ثمَّ اضربِ المقسومَ في العددِ نفسِهِ (١٠).

٦,٤٥ ضعِ الفاصلةَ العشريةَ
٢٢⟌١٤١,٩٠ اقسمْ كما في قسمةِ الأعدادِ الكليةِ
− ١٣٢
٩ ٩
− ٨ ٨
١ ١ ٠ أضفْ صفرًا للاستمرارِ
− ١ ١ ٠
٠٠٠

فيكونُ ناتجُ قسمةِ ١٤,١٩ على ٢,٢ هو ٦,٤٥ قارنْ ذلكَ بالتقديرِ

النّسبـــة : هي مقارنة بين عددين او كميّتين لهما نفس نوع الوحدات ، ويُعبّر عنها ب كسر او نقطتين او كسر عشري او صيغة مئوية و تُقرَأ (أ) إلى (ب)

مثال : نسبة 5 الى 25

$$5 : 25 = \frac{5}{25} = 0,2 = 20\%$$

مثال : محمد لديه 4 تفاحات و 16 كرزة كم نسبة التفاح الى الكرز ؟

$$\frac{4}{16} = \frac{4 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{4}$$

النسبة $1:4 = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

النسب المتكافئة : هي علاقة بين كميتين نفسهما وتكون متساوية المقدار..

هل نسبة ٢٥٠ كلم في ٤ ساعات، تكافئ نسبة ٥٠٠ كلم في ٨ ساعات أم لا؟

الطريقة ١ قارنْ بين النِّسب بعد كتابتها في أبسط صورة

$$٢٥٠ \text{ كلم : ٤ ساعات} = \frac{٢٥٠}{٤} = \frac{٢٥٠ \div ٢}{٤ \div ٢} = \frac{١٢٥}{٢}$$

اقسم كلًّا من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما (٢)

$$٥٠٠ \text{ كلم : ٨ ساعات} = \frac{٥٠٠}{٨} = \frac{٥٠٠ \div ٤}{٨ \div ٤} = \frac{١٢٥}{٢}$$

اقسم كلًّا من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما (٤)

لاحظ أنّ ناتجي التبسيط متساويان.

الطريقة ٢ ابحثْ عن عامل يربط بين النِّسبتين

$$\frac{٢٥٠}{٤} \overset{\times ٢}{\underset{\times ٢}{=}} \frac{٥٠٠}{٨}$$

٢ عامل مشترك بين النِّسبتين

إذن النِّسبتان متكافئتان.

٣ **كرة السلة :** أخطأ سامي في ٣٢ رمية من أصل ٩٣ محاولة في كرة السّلة، بينما أخطأ زميله أحمد في ١١ رمية من أصل ٣١ محاولة، فهل النِّسبتان متكافئتان؟ فسّر إجابتك.

سامي

$$٣٢ : ٩٣ = \frac{٣٢}{٩٣}$$

أحمد

$$١١ : ٣١ = \frac{٣ \times ١١}{٣ \times ٣١} = \frac{٣٣}{٩٣}$$

بما أنّ $\frac{٣٢}{٩٣} \neq \frac{٣٣}{٩٣}$ فالنسبتان غير متكافئتين.

المعدل :

تُسمى النسبة التي تقارن بين كميّتين لهما وحدتان مختلفتان تسمى **بالمعدل**.

$$\frac{\text{١٦٠ نبضة}}{\text{٢ دقيقة}} \leftarrow \boxed{\text{الوحدتان مختلفتان}}$$

عند تبسيط المعدل بحيث يصبح مقامه مساويًا ١ ، فإنه يُسمى **معدل الوحدة**.

$$\frac{\text{٨٠ نبضة}}{\text{١ دقيقة}} \leftarrow \boxed{\text{المقام يساوي ١}}$$

يبين الجدول أدناه بعض معدلات الوحدة الشائعة.

المعدل	معدل الوحدة	الاختصار	الاسم
عدد الكيلومترات / ١ ساعة	كيلومتر لكل ساعة	كلم / ساعة	السرعة
عدد الكيلومترات / ١ لتر	كيلومتر لكل لتر	كلم / لتر	استهلاك الوقود
عدد الريالات / ١ كيلوجرام	ريال لكل كيلوجرام	ريال / كجم	ثمن الوحدة
عدد الريالات / ١ ساعة	ريال لكل ساعة	ريال / ساعة	أجرة الساعة

مثال : إذا تقاضى احمد 840 ريال لقاء عمله 40 ساعة . فكم اجرته للساعة الواحدة ؟

$$\frac{840}{40} = 21$$

يتقاضى 21 ريال لكل ساعة .

#تعتبر معدلات الوحدة مفيدة عند اجراء المقارنات :

مثال من اختبار المقارنة باستعمال معدلات الوحدة

يبيّن الجدول المجاور ثمن ٣ علب مختلفة السعة من اللّبن. ما سعة العُلبة التي سعر الوحدة فيها أقل ما يمكن؟

أ) ١٠٠٠ ملل

ب) ٥٠٠ ملل

جـ) ٢٠٠ ملل

د) جميع العلب لها سعر الوحدة نفسه.

ثمن علب اللبن	
سعة العلبة (ملل)	السعر
١٠٠٠	٤ ريالات
٥٠٠	٢,٥ ريال
٢٠٠	ريال واحد

نوجد سعر الوحدة لكل نوع على حدة ثم نقارن بينها

نوع العلبة	سعر الوحدة
العلبة التي سعتها ١٠٠٠ ملل	٤ ريالات ÷ ١٠٠٠ ملل = ٠,٠٠٤ ريال / ملل.
العلبة التي سعتها ٥٠٠ ملل	٢,٥ ريال ÷ ٥٠٠ ملل = ٠,٠٠٥ ريال / ملل.
العلبة التي سعتها ٢٠٠ ملل	١ ريال ÷ ٢٠٠ ملل = ٠,٠٠٥ ريال / ملل.

بما أنّ سعر الوحدة للعلبة التي حجمها ١٠٠٠ ملل هو الأقل، فالإجابة هي أ

التناسب :

التناسب

التعبير اللفظي: **التناسب** هو حالة تتساوى فيها نسبتان أو معدلان على الأقل.

الرموز:

أعداد	جبر
$\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$ ، $\frac{٨ م}{١٠ ث} = \frac{٤ م}{٥ ث}$	$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ ، حيث ب، د ≠ ٠

تسمى نواتج الضرب أ د ، ب جـ بنواتج **الضرب التبادلي** للتناسب، وهي متساوية في أيّ تناسب. ويمكن استعمال الضرب التبادلي في حل تناسبٍ أحد أطرافه غير معروف.

$\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

٨ × ٣ = ٢٤

٦ × ٤ = ٢٤

نواتج الضرب التبادلي متساوية.

مثـــال تحديد العلاقات المتناسبة

١) ركض سعيد حول المضمار ٤ دورات كاملة في ٦٤ ثانية، و٥ دورات كاملة في ٧٦ ثانية. اعتمادًا على هذه المعلومات، هل عدد الدّورات متناسب مع الزمن بالثّواني؟ وضّح ذلك.

الطريقة ١ قارن معدلات الوحدة

$\frac{\text{الثّواني}}{\text{عدد الدورات الكاملة}}$ ← $\frac{٦٤ \text{ ثانية}}{٤ \text{ دورات}} = \frac{١٦ \text{ ث}}{١ \text{ دورة}}$ ، $\frac{٧٦ \text{ ث}}{٥ \text{ دورات}} = \frac{١٥,٢ \text{ ث}}{١ \text{ دورة}}$

بما أنّ معدّلات الوحدة غير متساوية، فإنّ عدد الدّورات لا يتناسب مع الزّمن بالثّواني.

الطريقة ٢ قارن النّسب باستعمال الضّرب التّبادلي

$\frac{٦٤ \text{ ث}}{٤ \text{ دورات}} \stackrel{?}{=} \frac{٧٦ \text{ ث}}{٥ \text{ دورات}}$

٦٤ × ٥ ≟ ٤ × ٧٦ احسب نواتج الضرب التبادلي

٣٢٠ ≠ ٣٠٤ اضرب

إذن عدد الدورات لا يتناسب مع الزمن بالثواني.

مثال : من كل 18 شخص يعانون من القرحة يتلقى اثنان فقط علاج ، فإذا كان 72 يعاني القرحة كم عدد الذين يتناولون العلاج ؟ نكتب التناسب أولا ثم ضرب تبادلي

$$\frac{x}{72} = \frac{2}{18} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 72 = 18 \cdot x$$

نقسم الطرفين على 18

$$18x = 144$$

$$x = 8$$

انواع التناسب :

التناسب الطردي	التناسب العكسي
هي علاقة طردية حيث ترتبط **زيادة** مقدار **بزيادة** الآخر بقيمة ثابتة (او انخفاض قيمة بانخفاض الأخرى) 	هي علاقة متعاكسة، بحيث ترتبط **زيادة** مقدارٍ **بانخفاض** الآخر بقيمة ثابتة (او انخفاض قيمة بزيادة الأخرى) 
القانون : $\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \rightarrow X_1 \cdot Y_2 = X_2 \cdot Y_1$ نفس ترتيب الارقام	**القانون :** $\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \rightarrow X_1 \cdot Y_1 = X_2 \cdot Y_2$ الارقام معكوسة
مقادير تتناسب طرديا" : ▪ **المسافة و الزمن :** (كلما زادت المسافة زاد الزمن اللازم للوصول) ▪ **المسافة والسرعة:**(كلما زادت السرعة زادت المسافة المقطوعة)	**مقادير تتناسب عكسيا" :** ▪ **السرعة و الزمن :** (كلما زادت السرعة يقل زمن الوصول)

طريقة استخدام القوانين : الاحرف تدل على نوعية المقدار (عدد ايام ، مقدار الاموال ، عدد الساعات ...) اما الارقام تدل على الترتيب ،

مثال: إذا كانت أجرة عامل مقابل يومين من العمل هي 70 ريال ،فكم اجرته اذا عمل 3 ايام ؟

المقادير في هذا السؤال (الايام و عدد الريالات) بذلك نفرض ان عدد الايام x , والريالات y

والمقادير في بداية السؤال (الترتيب) ستكون برقم ١ وفي نهاية السؤال برقم ٢

(إذا كانت أجرة عامل مقابل يومين من العمل هي 70 ريال) إذاً $x_1 = 2 \;,\; y_1 = 70$

(فكم اجرته اذا عمل 3 ايام) إذاً $x_2 = 3 \;,\; y_2 = ?$

نلاحظ انه تناسب طردي حيث انه كلما عمل العامل اكثر سيزيد اجره ، لذلك نقوم بالتعويض مباشرة في القانون ونحل المعادلة بضرب الطرفين في الوسطين

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \rightarrow \frac{2}{70} = \frac{3}{x}$$

$$\rightarrow 70 \cdot 3 = X \cdot 2 \rightarrow 210 = 2X \rightarrow \frac{2X}{2} = \frac{210}{2} \rightarrow X = 105$$

للتحقق: $\rightarrow 35 = 35 \quad \frac{70}{2} = \frac{105}{3}$ ، بما ان قيمة الكسرين متساوية إذاً" الحل صحيح

♣ ♣ ♣

طريقة أخرى: نوجد اجرة العامل في اليوم الواحد : $\frac{70}{2} = 35$

ثم نضربها في عدد الايام المطلوبة 3 : $35 \cdot 3 = 105$

وهكذا .... اجرته في خمسين يوم $35 \cdot 50 = 1750$

مثال: يقرأ الطالب 24 صفحة في 15 دقيقة بهذا المعدل كم صفحة يقرئها في 40 دقيقة ؟

تناسب طردي (كلما زادت الصفحات سيحتاج وقت اطول) **(نفرض الصفحات x الدقائق y)**

$$\frac{X_1}{Y_1}=\frac{X_2}{Y_2}\quad\rightarrow\quad\frac{24}{15}=\frac{X}{40}$$

$$24\cdot 40=15\cdot X\quad\rightarrow 960=15X$$

نقسم الطرفين على 15 لنجعل المجهول على طرف

$$\frac{960}{15}=\frac{15X}{15}\quad\rightarrow\quad X=64$$

للتحقق نلاحظ ان المساوة بين الكسرين فعلاً صحيحة : $\rightarrow 1.6=1.6\quad \frac{24}{15}=\frac{64}{40}$

♣

طريقة اخرى: نوجد كم يقرأ صفحة في الدقيقة الواحدة $\frac{24}{15}=1.6$

ثم نضربها في الدقائق المطلوبة $1.6\times 40=64$

مثال: اشترت مريم 3 حقائب ب 240 ريـال ، إذا اشترت سارة ب 400 من نفس نوعية الحقائب وبنفس التسعيرة فكم حقيبة اشترتها ؟

طردي (تزيد المشتريات ويزيد سعرها) **(نفرض الحقائب x الريالات y)**

$$\frac{3}{240}=\frac{x}{400}\quad\rightarrow\ 240\cdot\ x=3\cdot 400$$

$$240\,x=1200\quad\rightarrow\quad\frac{240\,x}{240}=\frac{1200}{240}$$

اشترت 5 حقائب $x=\ 5$

للتحقق: $\rightarrow 0.0125=0.0125\quad \frac{3}{240}=\frac{5}{400}$

♣

طريقة اخرى: نوجد سعر الحقيبة الواحدة $\frac{240}{3}=80$

ثم نضربها بعدد الحقائب المطلوب معرفة سعرها ،، هنا نعلم سعرها لكن لا نعلم عدد الحقائب (مجهول) $80\cdot X=400$

$$X=\frac{400}{80}\quad\rightarrow\quad X=5$$

مثال : تقطع سيارة 300 كلم في 4 ساعات ، اذا قطعت المسافة من ابها الى مكة في 8 ساعات ثم قطعت المسافة من مكة إلى القريات في 15 ساعة ،، فكم المسافة التي قطعتها السيارة من ابها الى القريات ؟ طردي **(**كلما زادت المسافة احتجنا وقت اطول لقطعها**)**

نفرض المسافة x الساعات y

المسافة من ابها الى مكة :

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \rightarrow \frac{300}{4} = \frac{X}{8} \quad \rightarrow \quad X = \frac{8 \cdot 300}{4} \quad \rightarrow \frac{2400}{4} = 600$$

للتحقق : $\frac{300}{4} = \frac{600}{8} \quad \rightarrow 75 = 75$

المسافة من مكة إلى القريات:

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \rightarrow \frac{300}{4} = \frac{X}{15} \quad \rightarrow \quad X = \frac{15 \cdot 300}{4} \quad \rightarrow \frac{4500}{4} = 1125$$

نجمع المسافتين: $600 + 1125 = 1725$

،،،،،،،،،،،

طريقة أخرى :

نوجد مقدار ما قطعته السيارة في ساعة واحده ثم نضربها في عدد الساعات المطلوبة

$$\frac{300}{4} = 75$$

إذا" في ساعة واحدة تقطع السيارة 75 كلم :

إذا" في 8 ساعات تقطع : $75 \cdot 8 = 600$

وفي 15 ساعة تقطع : $75 \cdot 15 = 1125$

$$600 + 1125 = 1725$$

مثال :إذا كان ثمن ثلاث حبات من التفاح 50 هللة كم حبة يمكن شراؤها بمبلغ 60 ريالاً ؟

اولا يجب تحويل الاموال لتكون جميعها بالريال ، حيث 50 هللة هي 0.5 ريال
نفرض ان (عدد التفاحx ، الريالات y)

$$\frac{3}{0.5} = \frac{X}{60} \quad \rightarrow 60 \cdot 3 = 0.5 \cdot X$$

$$X = \frac{180}{0.5} \quad \rightarrow \quad X = 360$$

♣ طريقة اخرى : سعر 6 حبات = ريال

$$6 \times 60 = 360$$

مثال : تنظف سارة المنزل في 6 ساعات ، إذا ساعدوها اختيها الاثنتين ففي كم ساعة ينهون العمل ؟ نلاحظ ان التناسب عكسي (كلما زاد المساعدون سيقل وقت انهاء العمل) (نفرض ان عدد العاملات x عدد الساعات y) ثم نعوض في قانون التناسب العكسي

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \longrightarrow \frac{1}{Y_2} = \frac{3}{6} \quad \longrightarrow 6 \cdot 1 = 3 \cdot y$$

$$6 = 3y \quad \to \frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \quad \to y = 2$$

ينهون العمل في ساعتين

♣ **طريقة اخرى :التدرج العكسي (نضرب طرف في عدد ما و نقسمه على الطرف الاخر او العكس)**

$$1 \quad \to \quad 6$$

عدد العاملات نضرب 1 في عدد يجعله يصبح 3 (عدد الاخوات)

$$3 \cdot 1 \quad \to \quad \frac{6}{3}$$

$$3 \quad \to \quad 2$$ **ثلاث اخوات ينهون العمل في ساعتين**

مثال : 3 طلاب ينهون البحث في 12 يوم ، فكم طالب سنحتاج لإنهاء البحث في 9 ايام؟
تناسب عكسي (كلما زاد الطلاب يقل وقت انتهاء العمل) (نفرض طلاب x ، ايام y)

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \longrightarrow \frac{3}{9} = \frac{x}{12} \quad \longrightarrow 12 \cdot 3 = 9 \cdot x$$

$$36 = 9x \quad \to \frac{9x}{9} = \frac{36}{9}$$

$$\to x = 4$$ **نحتاج 4 طلاب فقط**

♣

طريقة اخرى :التدرج العكسي (نضرب طرف في عدد ما و نقسمه على الطرف الاخر)

نقسم عدد الايام على نفسه لمعرفة كم طالب ينهي العمل في يوم واحد (ثم نضربه في الايام المطلوبة)

$$12 \quad \to \quad 3$$

نجعله يوم واحد نقسم على 12

$$\frac{12}{12} \quad \to \quad 3 \cdot 12$$

تدرج عكسي (عندما قسمنا طرف على 12 نضربه في الطرف الآخر)

$$1 \quad \to \quad 36$$

36 طالب ينهون العمل في يوم

$$1 \cdot 9 \quad \to \quad \frac{36}{9}$$

نضرب 1 في عدد يجعله يصبح 9 (عدد الايام)

$$9 \quad \to \quad 4$$

مثال: في مسبح يوجد الكثير من الصنابير لملئه بالماء ، اذا فتحنا 4 صنابير (بنفس القوة)فإنه يمتلئ في 6 ساعات ، إذا اردنا الاستعجال وملئه في ساعتين فكم صنبور سنفتح ؟؟

عكسي (كلما زادت الصنابير سيقل وقت الامتلاء) **(نفرض عدد الصنابير x ، الساعات y)**

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \longrightarrow \frac{4}{2} = \frac{X}{6} \quad \rightarrow \quad 4 \cdot 6 = X \cdot 2$$

$$\frac{24}{2} = \frac{2X}{2} \quad \rightarrow \quad X = 12$$

نحتاج 12 صنبور

♣ **طريقة التدرج العكسي(عدد الصنابير في ساعه واحده ثم نضربه في الساعات المطلوبة) :**

$$6 \rightarrow 4$$

$$\frac{6}{6} \rightarrow 6 \cdot 4$$

$$1 \rightarrow 24$$

في ساعه نحتاج *24* صنبور

$$1 \cdot 2 \rightarrow \frac{24}{2}$$

$$2 \rightarrow 12$$

مثال : يستطيع العامل الواحد بناء منزل خلال 15 شهر ،، اذا استعنا ب 10 عمال لبناء منزل ففي كم شهر ينهون العمل ؟؟

نلاحظ انه عكسي كلما زاد العمال قل وقت الانجاز ، (نفرض عدد العمال x عدد الاشهر y)

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \longrightarrow \frac{1}{y} = \frac{10}{15} \quad \rightarrow \quad 1 \cdot 15 = 10 \,.\, Y$$

$$\frac{15}{10} = \frac{10Y}{10} \quad \rightarrow \quad Y = 1.5$$

ينهون العمل في شهر ونصف

♣

التدرج العكسي :

$$1 \rightarrow 15$$

$$1 \cdot 10 \rightarrow \frac{15}{10}$$

$$10 \rightarrow 1.5$$

النسبة المئوية :

القاعدة العامة للنسب $\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

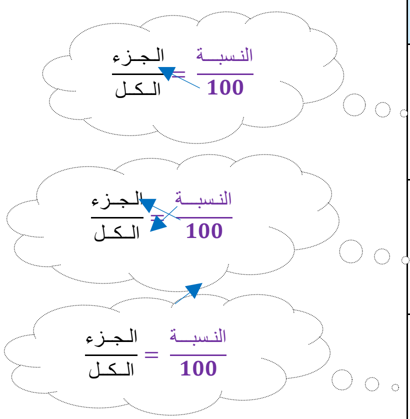
ومنها نستنتج بقية القوانين

أنواع أسئلة النسبة المئوية — ملخص المفاهيم

النوع	مثال	التناسب
إيجاد النسبة المئوية	ما النسبة المئوية للعدد ٣ من ٦؟	$\frac{٣}{٦} = \frac{ن}{١٠٠}$
إيجاد الجزء	ما العدد الذي يساوي ٥٠٪ من ٦؟	$\frac{جـ}{٦} = \frac{٥٠}{١٠٠}$
إيجاد الكل	ما العدد الذي ٥٠٪ منه يساوي ٣؟	$\frac{٣}{ك} = \frac{٥٠}{١٠٠}$

حل مسائل النسب بحفظ ٣ قوانين فرعية من القانون الأساسي $\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

المجهول	القانون
النسبة	$\frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{الكل}}$
الكل	$\frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{النسبة}}$
الجزء	$\frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100}$



◄ اشترى محمد سيارة مستعملة بقيمة تساوي 30% من سعر السيارة الجديدة التي تقدر قيمتها ب 60000 فكم قيمة سيارة محمد ؟؟؟

القيمة الكلية معلومة وقيمة سيارة محمد جزء منها ، بنسبة معلومة وهي 30%

إذاً" الجزء هو المجهول

$$\frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100} = \frac{30 \times 60000}{100} = \frac{18000\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 18000$$

لاختصار عمليات القسمة أي اصفار في البسط تذهب مع اصفار المقام بنفس عددها (اذا لم يوجد في الكسر أي عمليات جمع او طرح)

◄ انجزت فاطمة خياطة 12 فستان من اصل 48 طلبية كم النسبة التي انجزتها إلى حد الان؟

النسبة هي المجهولة

$$\frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{الكل}} = \frac{12 \times 100}{48} = 25\%$$

◄ كتبت هند 220 صفحة من البحث وبذلك تكون اوشكت على الانتهاء حيث اتمت 80% من البحث ،،،، فكم عدد صفحات البحث المطلوب تسليمه ؟

عدد صفحات البحث ككل هو المجهول

$$\frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{النسبة}} = \frac{220 \times 100}{80} = 275$$

◄ في نهاية السنة حصلت الطالبة على مجموع درجات 2500 من المجموع الكلي 3125 فكم نسبتها المئوية ؟

$$\text{النسبة} = \frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{الكل}}$$

$$\frac{2500 \times 100}{3125} = \frac{250000}{3125} = 80\%$$

حل النسب بحفظ القانون الأساسي فقط $\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$ **و وضع المجهول على طرف**

◄ حل الطالب 8 اسئلة من أصل 15 سؤال فكم نسبة الاسئلة التي حلها ؟؟

تقدير (بما أن 8 نصف 15 تقريبا فإن النسبة ستكون قريبة من 50%

$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$ ، النسبة المجهولة x

$\frac{x}{100} = \frac{8}{15}$ (ضرب تبادلي) لوضع المجهول على طرف

$x = \frac{8\times100}{15} = 53{,}3\ \%$

◄ يستلم موظف راتب يبلغ 12000 في الشهر ، و يعطي والده نسبة 5% من راتبه فكم يأخذ والده ؟ الجزء مجهول

$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{5}{100} = \frac{x}{12000}$ (ضرب تبادلي)

$x = \frac{12000\times5}{100} = 600$

◄ نصح الطبيب سعد بتخفيف وزنة بنسبة 16% من وزنه الحالي ليصل للوزن المثالي ، وبعد 3 اشهر حقق المطلوب وخسر 13 كيلو . فكم كان وزنه ؟

ال 13 كيلو هي الجزء من وزنه الكلي وتمثل 16% ،، اذا" الكل مجهول

$\frac{\text{النسبة}}{100} = \frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$

$\frac{16}{100} = \frac{13}{x}$ (ضرب تبادلي)

$13 \times 100 = 16 \times x$ نقسم الطرفين على 16

$x = \frac{100\times13}{16} = 81.25$

تطبيقات على النسبة المئوية :

الزيادة في السعر :

◄كم يصبح راتب موظف البالغ 4000 في الشهر اذا زاد بمقدار 40 % ؟

اولا" نوجد مقدار الزيادة (الجزء)

$$\text{الجزء} = \frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100}$$

$$x = \frac{40 \times 4000}{100}$$

$x = 1600$. مقدار الزيادة

الراتب بعد الزيادة = الراتب + الزيادة

5600 = 4000+ 1600

◄زادت ارباح المصنع 200% عن العام السابق حيث كانت ارباحه 30000 فكم ارباحه في السنة الثانية ؟

اولا" نوجد مقدار الزيادة (الجزء) :

$$\frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100} = \frac{200 \times 30000}{100} = \frac{6000000}{100} = 60000$$

ارباحه السنة الثانية = ارباح السنة الاولى + الزيادة

30000+60000 = 90000

الخصم : القيمة التي تخصم من سعر السلعة الأساسي (تخفيضات)

◄إذا كان سعر فستان 240 و كان عليه تخفيض بنسبة 35 % فكم سيصبح سعره ؟

ايجاد مقدار الخصم ثم ننقصه من السعر الأصلي

$$\text{الجزء} = \frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100}$$

$$x = \frac{35 \times 240}{100}$$

$x = 84$ الخصم

السعر بعد الخصم 240 – 84 = **156**

الـزكـــاة :

زكاة الاموال هو 2.5 ريال لكل 100 ريال ،،،
يمكن حسابها بقانون النسب حيث ان النسبة ثابته و هي 2.5

$$\text{الجزء} = \frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100} \quad ، \quad \text{الزكاة} = \frac{\text{المال} \times 2.5}{100}$$

#يوجد قانون خاص بالزكاة يسهل حسابها وهو ان نقسم مقدار الاموال على 40

المطلوب مقدار الزكاة	المطلوب المال ككل
$\text{مقدار الزكاة} = \frac{\text{المال}}{40}$	$\text{المال} = \text{مقدار الزكاة} \times 40$

☼ تمارين على الزكاة :

◄ 100 ريال كم الزكاة فيها ؟

$$\frac{100}{40} = 2.5$$

◄ 2400 ريال كم الزكاة فيها ؟

$$\frac{2400}{40} = 60 \qquad \text{قانون الزكاة}$$

$$\frac{2400 \times 2.5}{100} = 60 \rightarrow \text{الجزء} = \frac{\text{الكل} \times \text{النسبة}}{100} \qquad \text{او نستخدم قانون النسب}$$

◄دفع خالد 7000 ريال قيمة زكاته ، فكم كانت قيمة أمواله ؟

$$40 \times 7000 = 280000 \rightarrow \text{المال} = \text{مقدار الزكاة} \times 40$$

$280000 = x$ امواله قبل الزكاة .

◄ادخر محمد 64000 لمدة سنة ، كم سيتبقى له بعد اخراج الزكاة ؟

اولا يجب معرفة قيمة الزكاة ثم ننقصها من امواله

$$\frac{64000}{40} = 1600 \rightarrow \text{مقدار الزكاة} = \frac{\text{المال}}{40}$$

$$64000 - 1600 = 62400$$

خاص بالمستوى 2

العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة (a + b i) حيث a , b أعداد حقيقية و i عدد خيالي = $\sqrt{-1}$ ، حيث i^2= -1 ، و يسمى a الجزء الحقيقي من العدد المركب ، و b الجزء التخيلي من العدد المركب .

الاعداد المركبة تمنح حلول لبعض المعادلات التي لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية مثل المعادلة التالية : $(x+1)^2$= - 9

لا تقبل أي حل حقيقي لأن مربع عدد حقيقي إما يساوي الصفر أو هو موجب

$(x+1)^2 - 9 =$ بإخذ الجذر للطرفين

$(x+1) = \sqrt{-9}$

$(x+1) = \sqrt{-1 \times 9}$

$x+1 = \sqrt{9 \times i^2}$

$x+1 = 3i$

الحل $x = -1 \pm 3i$

مرافق العدد المركب : هو عدد مركب له نفس الجزء الحقيقي للعدد الاصلي ونفس الجزء التخيلي من حيث العدد ومختلفا عنه من حيث الإشارة.

مرافق العدد المركب $z = a + ib$ هو العدد المركب $\bar{z} = a - ib$

مثال : مرافق 5 + 3i يساوي 5 – 3i (وضربهما يعطينا عدد حقيقي)

مقياس العدد المركب (القيمة المطلقة للعدد المركب) ♦

$z = a + ib \rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال : اوجد مقياس 3 + 4i

$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

تحقق الاعداد التخيلية البحتة كلا من الخاصيتين التجميعية و التبديلية على الضرب، ويبين الجدول الاتي بعض قوى الوحدة التخيلية i:

$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^2 = -1$	$i^1 = i$
$i^8 = (i^2)^4 = 1$	$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -i$	$i^6 = (i^2)^3 = -1$	$i^5 = (i^2)^2 \cdot i = i$

خاص بالمستوى 2

ايجاد قيمة العدد الخيالي المرفوع للقوة n : i^n

i^n	n عدد زوجي	$\frac{n}{2}$ عدد زوجي	1
		$\frac{n}{2}$ عدد فردي	-1
	n عدد فردي	$\frac{n-1}{2}$ عدد زوجي	i
		$\frac{n-1}{2}$ عدد فردي	$-i$

مثال اوجد نواتج التالي : i^8 ، i^6 ، i^7 ، i^{17}

8 زوجي ، 4 = 8/2 زوجي اذاً : 1

6 زوجي ، 3 = 6/2 فردي اذاً : -1

7 فردي ، 3 = (7-1)/2 فردي اذاً : $-i$

17 فردي ، 8 = (17-1)/2 زوجي اذاً : i

العمليات على الاعداد المركبة :

لجمع الاعداد المركبة نجمع الحقيقية معا" والمركبة معا"

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي :

a) $(5-7i)+(2+4i)$

$(5-7i)+(2+4i)=(5+2)+(-7+4i)i$ خواص التبديل والتجميع والتوزيع

$=7-3i$ بسّط

وعند الضرب نستخدم التوزيع (نفس طريقة الضرب المعتاد بين قوسين)

$=(2+4i)\cdot(9-3i)$ $C=2+4i\ ,\ I=9-3i$

$=2(9)+2(-3i)+4i(9)+4i(-3i)$ باستخدام طريقة التوزيع بالترتيب

$=18-6i+36i-12i^2$ اضرب

$=18+30i-12(-1)$ $i^2=-1$

$=30+30i$ اجمع

خاص بالمستوى 2

$-5i \cdot 3i$ (a

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ اضرب

$= -15(-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بسّط

وفي القسمة نستخدم مرافق العدد المركب (للتخلص منه في المقام)

أوجدْ ناتج كلٍّ مما يأتي:

$\frac{2i}{3+6i}$ (a

$\frac{2i}{3+6i} = \frac{2i}{3+6i} \cdot \frac{3-6i}{3-6i}$ $3+6i$ ، $3-6i$ مترافقان مركبان

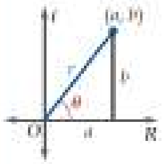
$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$ اضرب

$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$ $i^2 = -1$

$= \frac{6i + 12}{45}$ بسّط

$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$ اكتب الناتج على الصورة $a + bi$

مفهوم أساسي الصورة القطبية لعدد مركب



الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$.

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$

عبّر عن كل عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية:

$-6 + 8i$ (a

أوجد المقياس r والسعة θ.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغ التحويل $a < 0$ $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$

$= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$ $a = -6, b = 8$ $= \text{Tan}^{-1}(-\frac{8}{6}) + \pi \approx 2.21$

لذا فإن الصورة القطبية للعدد $-6 + 8i$ هي $10(\cos 2.21 + i\sin 2.21)$ تقريبًا.

اسئلة على المعيار الأول :

١) في كلية التحق بها عدد من الطلاب في اليوم الأول ،،، وفي اليوم الثاني انضم اليهم 8 ويمثلون 10% ممن التحق في اليوم الأول فكم عدد الطلاب في اليومين؟

88	98	77	66

٢) ذا اشترى محمد اجهزة بقيمة 2220 ريال وكانت الشركة تقدم عروض بحيث انه اذا تم شراء جهازين يحصل على خصم 20% وإذا تم شراء ثلاثة اجهزة يحصل على خصم 30% , فإذا اشترى جهازين ثم ثلاثة اجهزة فكم سعر الجهاز الواحد .

500	600	700	800

٣) كم مره يتكرر الرقم 3 ..... بين الاعداد من 0,1,2,3......99

9	19	10	20

٤) اوجد الحل : $10000 - (99\times99)$

199	180	200	210

٥) اذا زرع مزارع 300 فسيلة 60 في يوم ، ففي كم يوم يستطيع 10 مزارعين زراعة نفس الفسيلة .

6	8	11	14

٦) يستطيع محمد قراءة 60صفحه في 30 دقيقة ففي كم دقيقة يستطيع قراءة30 صفحة

9 min	10 min	15 min	18 min

٧) اذا كان في المعهد 15% تخصص كيمياء و5% تخصص رياضيات ، وعدد المنتسبين بالمعهد 220 طالب ، فكم عدد غير المتخصصين في الرياضيات ولا الكيمياء .

11	33	122	176

٨) اذا كان خالد يعمل في اليوم 5 ساعات وينجز عمله 3 في ايام ، فكم يحتاج ساعة في اليوم لينجز عملة في يومين .

6	6.5	7	7.5

٩) هناك 40 طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات ، وكان هناك 8 متفوقين في اللغة العربية و 6 في الرياضيات و 3 فيهم جميعا ، فكم عدد غير المتفوقين فيهم جميعا" .

24	29	25	30

١٠) حافلة اذا كان ركابها عبارة عن اطفال وبالغين ، ونسبة الاطفال الى البالغين 4:5 وعدد الركاب جميعا 36 فكم عدد الاطفال

16	18	20	22

١١) اذا كان $a < b < 5$ بحيث ان a,b اعداد اولية فإن المضاعف المشترك الاصغر ل $2a , 3b$ هو :

6ab	12ab	18ab	ab

١٢) ضعف العدد 2^8

2^{10}	2^9	2^{12}	2^{16}

١٣) يستطيع 3 عمال إنجاز عمل ما في 12 يوم كم يستغرق 9 عمال لإنجاز هذا العمل .

3	4	6	7

١٤) قط يستطيع ان يصعد الدرج ستة ستة بدون باق ، وثمانية ثمانية بدون باقي ، وعشرة عشرة بدون باقي فما أقل عدد من السلالم يحتوي الدرج .

30	60	120	240

١٥) ما العدد الذي يقبل القسمة على 4 , 6 , 9

18	24	36	72

١٦) اذا كانت $2^x \,.\, 2^y = 32$ فإن $x+y$

4	5	6	7

١٧) - $\left(\left((27)^{\frac{1}{2}}\right)^{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 9^a$ ماهي قيمة a التي تحقق المعادلة ...

1	*2*	*3*	*4*

١٨) إذا كان $3^{3y} = 27^3$ فما قيمة y

1	2	3	4

١٩) كرة ، ترتد بمقدار نصف المسافة التي سقطت منها ، إذا سقطت هذه الكرة من سطح على ارتفاع *18m* فما هي المسافة التي تكون قد قطعتها عندما ضربت الأرض للمرة الثالثة

36	*45*	*60*	*64*

٢٠) $100^{X+3} = 10^{Y+6}$ ، اوجد Y بدلالة X .

X= y	X =2y	Y = x +2	Y= 2x

٢١) $2^{x+1} = 256$ فأوجد قيمة x

5	3	7	5

٢٢) تستهلك سيارة 20L من البنزين عندما تقطع مسافة 240km كم تستهلك عندما تقطع 72km .

5L	6L	7L	8L

٢٣) إذا كان $6 = 2^X$ فإن 2^{2X}

2	12	24	36

٢٤) $F(x) = \frac{7}{2}\sqrt[3]{x^5}$

$(x)^{\frac{5}{3}}$	$\frac{-7}{2}(x)^{\frac{5}{3}}$	$(x)^{\frac{5}{3}}$	$\frac{7}{2}(x)^{\frac{5}{3}}$

٢٥) $(7-i)\cdot(7+i)$

40	*50*	*49-i*	*49+i*

٢٦) *اوجد قيمة* $4 + 8 \div 2 \times 4$

20	5	25	6

٢٧) $\left(\frac{16}{9}\right)^{-1}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$

٢٨) العدد $\frac{\sqrt{33}}{2}$ يقع بين :

2,3	3,4	4,5	1,2

٢٩) اذا كان $9^A = (((27)^{\frac{1}{2}})^4)^{\frac{2}{3}}$ فاوجد قيمة A؟

3	2	4	1

٣٠) اذا كانت $\frac{5}{x} = \frac{x}{5}$ فما هي القيم الممكنة ل x

± 10	± 5	± 15	± 25

٣١) اشترى طفل 12 حلوى و أكل ثلثها ،و اعطى أخيه 5 قطع ،، فكم نسبة المتبقي؟

10%	15%	25%	50%

٣٢)معلم راتبه 12400 اشترى ادوات مكتبية ب $\frac{3}{8}$ من راتبه ،، فكم يتبقى منه ؟

4650	6450	7750	9420

٣٣)اذا كان مقياس العدد المركب 3+ai هو 5 فما قيمة a ؟

0	1	3	4

الحلـــول :

١)عدد الطلاب في اليوم الأول x ، عددهم في اليوم الثاني x + 8

، نعلم من السؤال ان 8 تمثل 10% من X ،، إذاً سنوجد قيمة X بقانون النسبة (الكل)

$X = \frac{100\times 8}{10} = \frac{800}{10} = 80$ ،، عدد الطلاب في اليوم الأول 80 وعددهم في اليوم الثاني

80+8=88

٢) نفرض قيمة الجهاز x ، قيمة الاجهزة جميعها قبل التخفيض (5x)

$\frac{20}{100} = \frac{\text{القيمة بعد التخفيض}}{2x}$ (الجزء مفقود)

قيمة جهازين بعد التخفيض $2x(\frac{20}{100})$, قيمة ٣ اجهزه بعد التخفيض$3x(\frac{30}{100})$

قيمة الاجهزة جميعا ننقص منها قيمة الخصم يساوي 2220

$5x - (\frac{40x}{100} + \frac{90x}{100}) = 2220$ تبسيط

$5x - (\frac{130x}{100}) = 2220$ توحيد مقام

$$\frac{500x-130x}{100}=2220$$

$X = 600$ *سعر الجهاز الواحد قبل الخصم*

٣) في كل عشرة يوجد رقم 3

9 → (3,13,23,   ,43,53,63,73,83,93)

11 → (30 ,31 ,32 ,33 ,34 ,35 ,36 ,37,38,39)

مرتين

9+11 = 20

٤) 10000×9801 = 199

٥) التناسب عكسي لأنه عند ازدياد عدد العمال تقل الايام .

لا يهم عدد الفسائل لأنها نفسها ، يهمنا عدد العمال x وعدد الأيام y ،نطبق قانون التناسب العكسي

$$\frac{X_1}{Y_2}=\frac{X_2}{Y_1}\rightarrow\frac{1}{y}=\frac{10}{60}\quad\rightarrow\quad 60=10y\ \rightarrow\ \frac{60}{10}=\frac{10y}{10}\ \rightarrow\ y=6$$

٦) تناسب طردي كلما زاد الوقت y يستطيع قراءة صفحات اكثر x ،، نطبق التناسب الطردي

$$\frac{X_1}{Y_1}=\frac{X_2}{Y_2}\rightarrow\frac{60}{30}=\frac{30}{y}\ \rightarrow\ 60y=900\rightarrow\frac{60y}{60}=\frac{900}{60}\ \rightarrow y=15$$

٧) نسبة طلاب الكيمياء و الرياضيات= 20% ، اذا"نسبة غير المتخصصين 80%

المطلوب ايجاد 80% من العدد 220 (الجزء مفقود)

$$X=\frac{80\times 220}{100}=\ 176$$

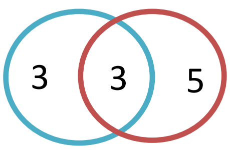
٨) تناسب عكسي (كلما زادت ساعات العمل x قلت الأيام y) ،، نطبق قانون التناسب العكسي

$$\frac{5}{2}=\frac{X}{3}\quad\rightarrow\quad 5\times 3=2X\ \ \rightarrow\ \frac{15}{2}=\frac{2X}{2}\ \rightarrow\ X=7.5$$

إذا" في يومين سبع ساعات ونصف

٩) عدد المتفوقين في العربي والرياضيات (11 =3-6+8) ننقص 3

لانهم مشتركين يتبقى 11 وهو عدد المتفوقين >> 40-11 = 29



١٠) $\frac{4}{5}$ مقابل اربعة اطفال خمسة بالغين ، اذا" الاطفال اقل ، نوجد النسبة العامة وهي مجموع النسبتين : 4+5=9 ونوجد عدد كلا" على حدة : (الجزء مفقود)

الاطفال $\frac{4}{9}(36) = 16$ ، البالغين $\frac{5}{9}(36) = 20$ .. اذا" الحل 16

١١) الاعداد الاولية الاصغر من 5 هي : 2,3

إذا" : b=3 , a=2

وبذلك يكون: 3b=9 , 2a=4

المضاعف المشترك الأصغر بين 4 , 9 هو 36

وللتحقق نحلل العددين

4	2		9	3
2	2		3	3
1			1	

$$lcm = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

والان نبحث في الاختيارات عن الذي يكافئ 36

نلاحظ ان : 6ab = 6 ×2×3 = 36

اذا" 6ab هو الاختيار الصحيح

١٢) ضعف العدد يعني ضربه في 2 ، $2 \times 2^8 = 2^{8+1} = 2^9$ قوانين الاسس

١٣) تناسب عكسي كلما زاد العمال x قلت ايام العمل y :

$$\frac{X_1}{Y_2} = \frac{X_2}{Y_1} \rightarrow \frac{3}{y} = \frac{9}{12} \rightarrow 12 \times 3 = 9y \rightarrow \frac{36}{9} = \frac{9y}{9} \rightarrow y = 4$$

١٤)نريد اقل عدد ينقسم على ستة و ثمانية وعشرة : نوجد المضاعف المشترك الأصغر

10	2		8	2		6	2
5	5		4	2		3	3
1			2	2		1	
			1				
2 ×5			2^3			2×3	

المضاعف المشترك الأصغر : $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

١٥) يجب ان يكون من مضاعفاتها جميعها وهو 36 حيث: $36 = 6 \times 6 . 36 = 4 \times 9$

١٦) قوانين الاسس $2^x \cdot 2^y = 32$

$2^{x+y} = 2^5 \quad \rightarrow \quad x + y = 5$

١٧) - $\left(\left((3^3)^{\frac{1}{2}}\right)^4\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{2^a}$ قوانين اسس القوة

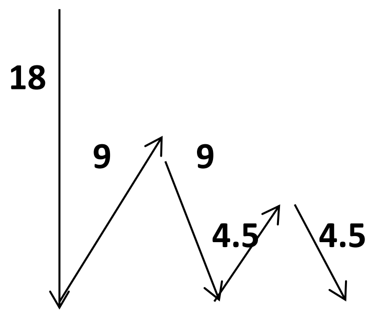
$3^{2a} = 3^{3\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{3}}$ قيمتين متساوية و الاساس واحد اذا" الاسس متساوية

$2a = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{2a}{2} = \frac{4}{2} \quad \rightarrow \quad a = 2$

١٨) نعلم ان : $27 = 3^3$ ، اذاً : $3^{3y} = 3^9 \quad \rightarrow \quad 3^{3y} = 3^{3^3}$ ، الاساس متساوي

3y = 9 , y=3

١٩) 18 + 2(9) + 2(4.5) = 45



٢٠) نعلم ان: $10^2 = 100$ اذاً $10^{2^{x+3}} = 10^{y+6}$ قوانين الاسس (اس القوة)

$2\,(x + 3) = y + 6$

2x + 6 = y + 6

2x = y

٢١) $2^{x+1} = 2^8$

X+1=8 , x=7

٢٢) تناسب طردي تزيد المسافة x يزيد استهلاك الوقود y

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} \rightarrow \frac{240}{20} = \frac{72}{y} \rightarrow 240y = 1440 \rightarrow \frac{240y}{240} = \frac{1440}{240} = 6$$

الحل هو 6 لتر

٢٣) $6^2 = 2^{x^2}$ نربع الطرفين $36 = 2^{2x}$ قوانين الاسس

٢٤) نحول الجذر الى اس :

$$\frac{7}{2}(x)^{\frac{5}{3}}$$

لان الجذر التكعيبي يساوي $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ و و $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ وهكذا ...

٢٥) $i = \sqrt{-1}$ *(عند ضرب جذرين متساويين ينتج ما تحت الجذر)*

$$(7 - i) \times (7 + i) = 49 + 7i - 7i - (-1) = 50$$

٢٦) *الضرب والقسمة ثم الطرح والجمع*

$$4 + 8 \div 2 \times 4 = 4 + 4 \times 4 = 4 + 16 = 20$$

٢٧)

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{-1} = \left(\frac{4^2}{3^2}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

للتخلص من الأس السالب نحوله موجب ونقلب الكسر

٢٨) *نأخذ اقرب عددين له مربعات كاملة* $\sqrt{25} < \sqrt{33} < \sqrt{36}$

$$5 < \sqrt{33} < 6$$

$$\frac{5}{2} < \frac{\sqrt{33}}{2} < \frac{6}{2}$$

$$2.5 < \frac{\sqrt{33}}{2} < 3$$

اذاً" يقع بين 3 , 2

٢٩) $27 = 3^3$

$$(((3^3)^{\frac{1}{2}})^4)^{\frac{2}{3}} = 9^A$$

$$3^{3\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{3}} = (3)^{2^{A}}$$

$$3^4 = 3^{2A}$$

4=2A >>> A =2

٣٠) طرفين في وسطين

$$x^2 = 25 \ \rightarrow x = \pm 5$$

٣١) أكل ثلثها : $12 \times \frac{1}{3} = 4$

يتبقى : $12 - 4 = 8$

اعطى أخيه 5 : $8 - 5 = 3$

إذاً" المتبقي لديه 3 قطع حلوى ، نريد نسبتها من 12

$$\text{النسبة} = \frac{\text{الجزء} \times 100}{\text{الكل}} \rightarrow \mathbf{x} = \frac{3 \times 100}{12} \rightarrow x = \frac{300}{12} = 25\%$$

٣٢)

$$12400 \times \frac{3}{8} = \frac{12400 \times 3}{8} = \frac{37200}{8} = 4650$$

المتبقي : $12400 - 4650 = 7750$

٣٣)

المقياس هو جذر مربعي العددين الحقيقيين: $5 = \sqrt{3^2 + a^2}$

نربع الطرفين : $25 = 3^2 + a^2$

$$a^2 = 25 - 9 \ \rightarrow \ a^2 = 16 \ \rightarrow \ a = 4$$

المعيــار الثاني

مستوى 2

المعيار ٣.٤.٢: يتعرف مبادئ الجبر والدوال الحقيقية	١. يتعرف خصائص المجموعات والعمليات عليها (التقاطع، الاتحاد،....) ٢. يحل العبارات الجبرية ويبسطها ٣. يحل المعادلات والمتباينات الخطية والتربيعية والمحتوية على قيمة مطلقة ٤. يجري العمليات على المصفوفات ٥. يحل أنظمة المعادلات الخطية، ويستخدم المصفوفات والمحددات في ذلك، ويمثل الحل جبريا وهندسيا ٦. يستخدم خواص الدوال الأسية واللوغاريتمية في حل المعادلات ٧. يقارن بين العلاقات والدوال، وخصائص الدوال الحقيقية وأنواعها، ويوجد مجالها ومداها ٨. يجري العمليات على الدوال (العمليات الأربع، التحصيل، ومعكوس الدالة) ٩. يرسم الدوال الخطية وكثيرات الحدود من الدرجة الثانية

مستوى 1

المعيار٣.٣.٢: يتعرف مبادئ الجبر والدوال الحقيقية	١. يعرف خصائص المجموعات والعمليات عليها (التقاطع، الاتحاد، ...). ٢. يحلل العبارات الجبرية ويبسطها. ٣. يحل المعادلات والمتباينات الخطية والتربيعية. ٤. يتعرف الأنماط ويمثلها ويحللها ويعممها. ٥. يتعرف خصائص الدوال الحقيقية وأنواعها، ويوجد مجالها ومداها. ٦. يجري العمليات على الدوال الخطية وكثيرات الحدود من الدرجة الثانية

المجموعات و العمليات عليها :

المجموعة طائفة من الأشياء الموضوعة سوياً، وتسمى هذه الأشياء **عناصر المجموعة**، وعادة ما تكتب المجموعة باستخدام معقوفتين { } توضع بينهما عناصر المجموعة، فمثلا {a ,b ,c} هي مجموعة عناصرها a , b , c
وبما ان a عنصر في المجموعة فإن **a ∈ { a , b , c }** وهذا رمز الانتماء

العمليات على المجموعات :

- 1 التقاطع و رمزه ∩
- 2 الاتحاد و رمزه. ∪
- 3 متممة المجموعة و رمزها $\bar{x}$

أولاً :- التقاطع:-

هي مجموعة العناصر المشتركة التي تنتمي لكل من المجموعتين في آن واحد.
فمثلاً :- X هي مجموعة { 4 ، 5 } و Y هي مجموعة { 5 ،3 }
X ∩ Y = { 5 } نسمي المجموعة الجديدة x
و يمكن التعبير عن التقاطع كما يلي :- { x : x ∈ X ^ x ∈ Y }

ملاحظة :- إذا كان X ∩ Y = Ø نقول عن X و Y أنهما متباعدتان أي منفصلتان.

ثانياً :- الاتحاد:-

هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى أو الثانية.
فمثلاً :- X هي مجموعة { 4 ، 5 } و Y هي مجموعة { 5 ،3 }
X ∪ Y = { 4 , 3 , 5 } بحيث لا نكرر العدد مرتين في المجموعة
و يمكن التعبير عن الاتحاد كما يلي :- :- { x : x ∈ X v x ∈ Y }

مُتمِّمة مجموعة :

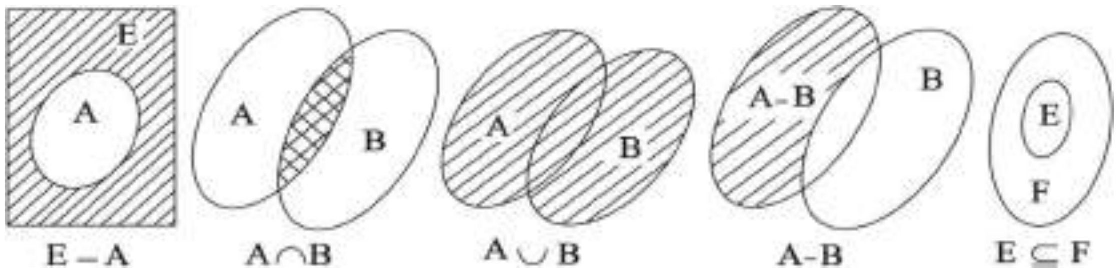
هي مجموعة العناصر في X التي لا توجد في المجموعة Y

مثال : X={1 ,2 ,3 ,4 ,5}

Y **مجموعة جزئية** من X ، يرمز لها $X \subseteq Y$

حيث Y={1 ,2 }

متممة $Y = \overline{Y} = \{3 , 4 , 5 \}$



بعض خواص عمليات التقاطع و الاتحاد:-

1) الإبدال : $X \cap Y = Y \cap X$ ، $X \cup Y = Y \cup X$

2)التجميع :

$(Z \cap Y) \cap X = Z \cap (Y \cap X)$

$(Z \cup Y) \cup X = Z \cup (Y \cup X)$

3)توزيع التقاطع على الاتحاد :-

$(Z \cup Y) \cap X = (Y \cap X) \cup (Z \cap X)$

4)توزيع الاتحاد على التقاطع:-

$(Z \cap Y) \cup X = (Y \cup X) \cap (Z \cup X)$

العبارات الجبرية..

ويُسمَّى فرع الرياضيات الذي يتعامل مع عبارات تحتوي متغيِّرات **الجبر**. كما يُسمَّى المقدار ن + ٢ **عبارة جبرية**؛ لأنه يحتوي رموزًا وأعدادًا وعملية حسابيّة واحدة على الأقل.

المتغير : عدد مجهول يتم التعبير عنه بأحد الحروف

حساب قيمة عبارة جبرية :

مثال أوجد قيمة $10\ (z+1)$ عندما تكون Z = 2

$$10\ (\ 2\ +\ 1\ )\ =\ 10\ (\ 3\ )\ =\ 30$$

اوجد قيمة $5x-3y$ إذا كان $x=4$ و $y=2$

$$5(4)-3(2)=20-6=14$$

غالبًا ما تُحذف إشارة الضرب في العبارات الجبرية، وفيما يلي أمثلة على ذلك:

يُسمَّى العدد المضروب في رمز المتغيِّر **مُعاملًا**. فمثلًا ٦ هو المُعامل في ٦ د.

تجزِّئ إشارتا الجمع والطرح العبارة الجبرية إلى أجزاء يُسمى كل منها **حدًا**، والعامل العددي لحد يشتمل على متغير يُسمى **معامل** المتغير.

تشتمل **الحدود المتشابهة** على المتغيرات نفسها بالقوى نفسها. فمثلًا $٣س^{٢}$، $-٧\ س^{٢}$ حدان متشابهان. وكذلك $٨س\ ص^{٢}$، $١٢س\ ص^{٢}$، أما الحدان $١٠س^{٢}\ ص$، $٢٢س\ ص^{٢}$ فغير متشابهين، والحد الذي لا يشتمل على متغير يُسمى **ثابتًا**، والحدود الثابتة متشابهة.

مثال : عين الحدود والمعاملات و الثوابت في العبارة؟

$$3x^2+6x+2x-4$$

الحدود هي : $3x^2,\ 6x, 2x, -4$ الحدود المتشابهه : 6x , 2x

المعاملات : 6 ، 2 ، الثوابت : 4 -

كتابة العبارات اللفظية بطريقة جبرية :

عادة ما تشير بعض الجمل والعبارات إلى عمليات حسابية تشمل الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة. وفيما يلي بعض الأمثلة:

الجمع والطرح		الضرب والقسمة	
المجموع	الفرق	اضرب	اقسم
أكبر من	أقل من	ناتج ضرب	ناتج قسمة
زاد بمقدار	قل بمقدار	أضعاف	جزء

مثال : استبدل العبارات اللفظية التالية بعبارة جبرية

◄مع خالد خمسة ريالات زيادة على مع ما محمد :

نفرض ان ريالات محمد x ، إذا"العبارة الجبرية (x + 5)

◄مع سارة حلويات اقل ب 6 من حلويات هند :

نفرض حلويات هند x ، إذا العبارة الجبرية (x - 6)

تبسيط العبارات الجبرية :

خاصية توزيع الضرب على الجمع

التعبير اللفظي: لضرب مجموع عددين في عدد يُضرب كلُّ عدد بين القوسين في العدد خارجهما.

أمثلة:

أعداد	جبر
٣(٤ + ٦) = ٣(٤) + ٣(٦)	أ(ب + جـ) = أ(ب) + أ(جـ)
٥(٧) + ٥(٣) = ٥(٧ + ٣)	أ(ب) + أ(جـ) = أ(ب + جـ)

يمكن جعل العبارة بأبسط صورة إذا لم تتضمن حدود متشابهة او اقواس ويمكن استعمال خاصية التوزيع لتجميع الحدود المتشابهة وهو ما يسمى (تبسيط العبارة)

مثال بسط العبارة التالية :

$$7x + 2 - 7x - 6$$

المتشابهة 2 , -6   7X , -7X

$$7x - 7x + 2 - 6 = x(7 - 7) - 4 = x(0) - 4 = 0 - 4 = -4$$

***اشتريت عدد من الدفاتر ب 8 ريال للدفتر الواحد و نفس العدد من الاقلام بسعر 6.5 ريال للقلم الواحد ، اكتب عبارة تمثل ما دفعته في ابسط صورة؟**

x هو عدد الدفاتر او الاقلام

$$8x + 6.5x = x(8 + 6.5) = 14,5x$$

وحيدات الحد : تكون وحيدة الحد عدد او متغير او حاصل ضرب عدد في متغير واحد او أكثر بأسس صحيحة غير سالبة و تتكون من حد واحد فقط

مثال : y , $4m$, $\left(\frac{x}{22}\right)^3$, 5

حدد العبارات التالية هل هي وحيدة حد أم لا ؟

10) نعم لأنه عدد ثابت فهو وحيدةحد

$X+24$) لا ، تتضمن العبارة عملية جمع فهي تحوي اكثر من حد

y^2) نعم لأنها حاصل ضرب المتغير في نفسه

$\frac{x}{ym}$) لا ، حاصل قسمة على متغير ليست وحيدة حد


مفهوم أساسي — تبسيط وحيدات الحد — أضف إلى مطويتك

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:
- لا تتضمن قوى قوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أقواسا أو أسسا سالبة.

بسط كل عبارة فيما يأتي :

- $(2a^{-2})(3a^3b^2)(c^{-2})$

$$= 2.3.\frac{a^3}{a^2}\,b^2c^2 \rightarrow 6a\,b^2\frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{6a\,b^2}{c^2}$$

- $\frac{r^4\,q^2}{r^3\,q^7}$

$$= q^{2-7}\,.\,r^{4-3} \rightarrow q^{-5}r \rightarrow \frac{r}{q^5}$$

- $\left(\frac{-2a^4}{b^2}\right)^3$

$$= \frac{(-2a^4)^3}{(b^2)^3} \rightarrow \frac{(-2)^3(a^4)^3}{(b^2)^3} \rightarrow \frac{-8a^{12}}{b^6}$$

كثيرات الحدود: هي وحيدة حد أو مجموعة وحيدات حد، تسمى كل وحيدة حد منها حدا" في كثيرة الحدود ، وبعض كثيرات الحدود تحمل اسماء خاصة ، فثنائية الحد هي مجموع وحيدتث حد بأبسط شكل ، وثلاثية الحدود هي مجموع ثلاث وحيدات حد بأبسط شكل ،

مثال : ميز كثيرات الحدود فيما يلي :

- $(4x+5yz)$: نعم لآنها مجموع وحيدتي حد تسمى ثنائية حد .
- (6) : نعم لأنها عدد حقيقي يمثل وحيدة حد لذلك تسمى ايضا" كثيرة حدود.
- $(9x+7y^{-3}$: لا، يوجد اس سالب وهو لايمثل وحيدة حد ، إذا" ليس كثيرة حدود
- $(5x^3-4x+x-6$: نعم ، لأنها ثلاثية حدود

درجة كثيرة الحدود : نوجد درجة كل حد على حدة ثم نختار اكبر درجة

◄ **مثال: اوجد درجة كثيرة الحدود التالية : $2x^2+4y^3z+6$**

درجة الحد الاول $2x^2$ $=2$

درجة الحد الثاني $4y^3z$ = 3+1 = 4 نجمع قوة المتغيرين y^3z

(اذا لم نكتب اس للمتغير فهو 1) ، درجة الحد الثابت 0

اذاً اكبر درجة هي درجة الحد الثاني وهي درجة كثيرة الحدود 4

◄ **مثال: اوجد درجة كثيرة الحدود التالية : $\frac{2}{5}x^2y^5+4y^5z+2$**

الحد الأول مجموع اسس متغيراتها هو 7 وهو اكبر اس ،،، إذا" هذه درجة كثيرة الحدود .

- **جمع كثيرات الحدود و طرحها : (يكون بجمع الحدود المتشابهة (نفس الأس)**

$$(4x^2-5x+6)+(2x^2+3x-1)$$

نتخلص من الاقواس ونجمع(نطرح) الحدود المتشابهة :

$$4x^2-5x+6+2x^2+3x-1=4x^2+2x^2-5x+3x+6-1$$

$$=6x^2-2x+5$$

- **ضرب وحيدة حد في كثيرة حدود : (نضرب وحيدة الحد في كل الحدود)**

$$3x(2x^2-4x+6)=3x(2x^2)-3x(4x)+3x(6)$$

$$6x^{2+1}-12x^{1+1}+18x=6x^3-12x^2+18x$$

- **ضرب كثيرات الحدود : (نستخدم خاصية التوزيع)**

$$(y^2+4y-6)(y+2) = y^2(y+2)+4y(y+2)-6(y+2)$$
$$= y^2.y+2y^2+4y.y+4y.2-6y-6.2$$
$$= y^3+2y^2+4y^2+8y-6y-12$$
$$= y^3+6y^2+2y-12$$

- **حالات خاصة في العمليات على كثيرات الحدود:**

مربع مجموع حدين والفرق بينهما	
طريقة التحليل	**الحالة العامة**
مربع مجموع حدين	$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$
مربع الفرق بين حدين	$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$

مثال اوجد ناتج : $(3x+5)^2$

$$= (3x)^2+2(3x)(5)+5^2 \rightarrow 9x^2+30x+25$$

اوجد ناتج : $(2x-5y)^2$

$$= (2x)^2-2(2x)(5y)+(5y)^2 = 4x^2-20xy+25y^2$$

الفرق بين مربعين	
طريقة التحليل	**الحالة العامة**
الفرق بين مربعين	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

مالقيمة الموجبة التي تحقق المعادلة ؟ : $y=x^2-\frac{4}{9}$

$a)\ \frac{4}{3}$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ \frac{2}{9}$ $\quad d)\ \frac{2}{3}$

نعوض عن y بالصفر لإيجاد قيمة x :

$$0=x^2-\frac{4}{9} \rightarrow 0=x^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow 0=\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

يوجد حلين : $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{2}{3}$ نأخذ الحل الموجب

مفهوم أساسي — مجموع مكعبين والفرق بينهما — أضف إلى مطويتك

طريقة التحليل	الحالة العامة
مجموع مكعبين	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

يعد تحليل كثيرة الحدود تحليلا" تاما" إذا كتبت في صورة ناتج ضرب كثيرات حدود جميعها أولية ، أي إذا حللت إلى اقصى درجة ممكنة .

حلّل كلًا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية :

a) $16x^4+54xy^3$

$16x^4+54xy^3=2x(8x^3+27y^3)$ أخرج العامل المشترك الأكبر

كل من $8x^3$ و $27y^3$ مكعب كامل، لذا تستطيع استعمال طريقة مجموع مكعبين.

$8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$ $8x^3=(2x)^3;\ 27y^3=(3y)^3$

$=(2x+3y)[(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2]$ مجموع مكعبين

$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ بسّط

$16x^4+54xy^3=2x(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ اكتب العامل المشترك الأكبر

قسمة كثيرات الحدود :

- **قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد**

بسط العبارة: $\dfrac{6x^4y^2+12x^3y^2-18x^2y}{3xy}$

$$=\frac{6x^4y^2}{3xy}+\frac{12x^3y^2}{3xy}-\frac{18x^2y}{3xy}$$

$$=\frac{6}{3}x^{4-1}y^{2-1}+\frac{12}{3}x^{3-1}y^{2-1}-\frac{18}{3}x^{2-1}y^{1-1}$$

$$=2x^3y+4x^2y-6x$$

- **قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود : (مشابهه لعملية القسمة الطويلة(الكرسي))**

اوجد الناتج : $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-5 & x^2 + 3x - 40 \\ & (-)\ x^2 - 5x \\ \hline & \qquad 8x - 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 8 \\ \hline x-5 & x^2 + 3x - 40 \\ & (-)\ x^2 - 5x \\ \hline & \quad 8x - 4 \\ & (-)\ 8x - 40 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x + 8$ والباقي 0

قد ينتج باقي عند القسمة : فمثلا $8 \div 3$ الناتج 2 والباقي 2 يكتب على الشكل : $8 \div 3 = 2 + \frac{2}{3}$

الناتج المقسوم عليه الباقي

إرشادات للدراسة

خطوات خوارزمية قسمة كثيرة حدود على أخرى:

- اكتب كثيرة الحدود في كلٍّ من المقسوم والمقسوم عليه، بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبًا تنازليًا حسب درجتها.
- ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك.
- اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه، واكتب الإجابة تحت المقسوم، واطرحه من المقسوم.
- استمر بقسمة الحد الثاني ... إلخ حتى تصل إلى أن يكون باقي القسمة 0، أو كثيرة حدود درجتها أقل من درجة المقسوم عليه.

أي مما يأتي يكافئ العبارة: $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$ ؟

A $a + 10 - \frac{19}{3-a}$ C $-a - 10 + \frac{19}{3-a}$

B $-a + 10$ D $-a - 10 - \frac{19}{3-a}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن العامل الثاني مرفوع للأس -1، فهذه إذن مسألة قسمة.

$$(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = \frac{a^2 + 7a - 11}{3 - a}$$

حل فقرة الاختبار

$$\begin{array}{r|l} & -a - 10 \\ \hline -a+3 & a^2 + 7a - 11 \\ & (-)\ a^2 - 3a \\ \hline & \qquad 10a - 11 \\ & (-)\ 10a - 30 \\ \hline & \qquad\quad 19 \end{array}$$

لتسهيل عملية القسمة، أعد كتابة $3 - a$ على الصورة $-a + 3$

$-a(-a + 3) = a^2 - 3a$

$7a - (-3a) = 10a$

$-10(-a + 3) = 10a - 30$

$-11 - (-30) = 19$

ناتج القسمة هو $-a - 10$، والباقي 19 .

لذا فإن $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1} = -a - 10 + \frac{19}{3-a}$، ومن ثم تكون الإجابة هي البديل C.

ملخص المفهوم

طرائق التحليل

أضف إلى مطويتك

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

حلّل كلًّا من كثيرتي الحدود الآتيتين تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

a) $8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$

$8ax + 4bx + 4cx + 6ay + 3by + 3cy$ العبارة الأصلية

$= (8ax + 4bx + 4cx) + (6ay + 3by + 3cy)$ جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= 4x(2a + b + c) + 3y(2a + b + c)$ أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (4x + 3y)(2a + b + c)$ خاصية التوزيع

b) $a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

بما أن كثيرة الحدود هذه من 6 حدود، إذن حلل أولًا بتجميع الحدود.

$a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3 - b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3$

$= (a^3x^2 - 6a^3x + 9a^3) + (-b^3x^2 + 6b^3x - 9b^3)$ جمّع لإخراج العامل المشترك الأكبر

$= a^3(x^2 - 6x + 9) - b^3(x^2 - 6x + 9)$ أخرج العامل المشترك الأكبر لكل تجميع

$= (a^3 - b^3)(x^2 - 6x + 9)$ خاصية التوزيع

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x^2 - 6x + 9)$ الفرق بين مكعبين

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(x - 3)^2$ ثلاثية حدود المربع الكامل

مفهوم أساسي

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

.

المعـــــادلات :

المعادلة هي جملة رياضية تحتوي حدين تفصل بينهما اشارة المساواة .

مثال : $x + 14 = 18$ بعض المعادلات يمكن حلها ذهنيا" بحيث نبحث عن الرقم الذي نجمعه مع x ويكون المجموع 18 ، يكون حل المعادلة هو (4)

كتابة المعادلة : اكتب الجمل التالية على صورة معادلة جبرية :

◄ اقل من العدد ب 6 يساوي 20 .

بما ان العدد مجهول نرمز له ب x ، اذ" $x - 6 = 20$

◄ ثلاثة أمثال(اضعاف) عمر أحمد يساوي 12 .

عمر احمد مجهول x ، $3x = 12$

◄ مع مها 5,5 ريال ، زادها والدها مبلغ من المال فأصبح 16 ريال .

المال المضاف مجهول x : $x + 5.5 = 16$

حل المعادلات :

مفهوم أساسي — خطوات حل المعادلة (أضف إلى مطويتك)

- الخطوة ١: بسّط العبارات الموجودة في طرفي المعادلة، واستعمل خاصية التوزيع إن احتجت إلى ذلك.
- الخطوة ٢: استعمل خاصية الجمع أو خاصية الطرح في المساواة للحصول على معادلة مكافئة تكون المتغيرات في أحد طرفيها والأعداد الثابتة في الطرف الآخر، ثم بسّط.
- الخطوة ٣: استعمل خاصية الضرب أو خاصية القسمة في المساواة لحل المعادلة.

في المعادلات اذا اضفنا او طرحنا او ضربنا او قسمنا من الطرفين **نفس العدد** يبقى طرفا المعادلة متساويين .

أمثـلـة : ◄ $x + 2 = 9$

نتخلص من 2 لنجعل المجهول على طرف وذلك بطرح 2 من الطرفين

$X + 2 - 2 = 9 - 2 \rightarrow X = 7$

◄ $X - 4 = 15$

للتخلص من -4 نضيف +4 للطرفين

$X - 4 + 4 = 15 + 4 \rightarrow X = 19$

◀ 15 X = 30

للتخلص من 15 نقسم الطرفين على 15

$\frac{15x}{15} = \frac{30}{15} \rightarrow x = 2$ قسمة العدد على نفسه = 1

◀ $\frac{x}{3} = 1$

للتخلص من $\frac{1}{3}$ نضرب الطرفين في 3

$\frac{3x}{3} = 3\times1 \rightarrow x=3$

◀ سيارة سرعتها 100كلم/ساعه ، ستقطع مسافة 400 كيلو فكم ستستغرق من الزمن للوصل الى وجهتها ؟

من أكثر الصيغ الرياضية شيوعاً المعادلة : **ف = ع ن** ، المسافة = السرعة × الزمن

ف = ع ن ،، الزمن هو المجهول

400 = 100 ن ،، نقسم الطرفين على 100

4 ساعات = ن

للتحقق نعوض و نتأكد أن طرفي المعادلة متساويان √ 4 × 100 = 400

معادلات ذات خطوتين :

أمثلة تحويل جمل إلى معادلات

حوّل كل جملة فيما يأتي إلى معادلة:

	الجملة	المعادلة
١	أقل من ثلاثة أمثال عدد بمقدار ثمانية يساوي −٢٣	٣ن − ٨ = −٢٣
٢	يزيد العدد ثلاثة عشر على مثلَي عدد ما بمقدار ٧	١٣ = ٢ن + ٧
٣	ناتج قسمة عدد على ٤ مطروحًا منه واحد يساوي ٥	$\frac{ن}{٤}$ − ١ = ٥

حل معادلات بخطوتين :

بنفس طريقة معادلات ذات الخطوة لكن فيها عمليتان مختلفتان و نتخلص من أكثر من عدد :

حل المعادلات ذات الخطوتين

لحلّ المعادلات ذات الخطوتين، مثل: ٣س + ٤ = ١٦، أو ٢ س - ١ = -٣.

الخطوة ١: تخلَّصْ من الجمع بالطَّرح أو العكس.

الخطوة ٢: تخلَّصْ من الضَّرب بالقسمة أو العكس.

حل المعادلة التالية:

◄ 6x - x + 4 - 2 = 12

نجمع المقادير المتشابهة اولا(الثوابت معا، المتغيرات معا)

تصبح المعادلة 5 x + 2 = 12

نريد المتغير على طرف ، أولا نتخلص من العدد الثابت (جمع او طرح) ثم معامل المتغير(ضرب او قسمة)

$$5x + 2 - 2 = 12 - 2 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{10}{5} \rightarrow x = 2$$

◄ اقام محمد حفلة في منتزه ودفع 321 ريال ثمن (تذاكر الدخول وثمن العصير والكعك) ، فإذا كان ثمن العصير والكعك 270 وثمن دخول الفرد 8.5 ريال ،فكم كان عدد اصدقائه ؟

نحولها إلى معادلة ، المجهول عدد الأصدقاء نرمز له x

السعر الكلي 321 عبارة عن مجموع ثمن(الطعام + التذاكر)

التذاكر: ثمن دخول الفرد ضرب عدد الافراد

الطعام

$$8.5x + 270 = 321$$

$$8.5\,x + 270 - 270 = 321 - 270$$

$$8.5x = 51$$

$$\frac{8.5x}{8.5} = \frac{51}{8.5} \rightarrow x = 6$$

◄**مثال :** تناولت و زميلك طعام بمبلغ 90 ريال وكانت وجبتك تزيد ب 10 ريال عن وجبة زميلك ، فكم تكلفة وجبة زميلك ؟

سعر وجبة الزميل X مجهول ،
ووجبتك مثل مقدار وجبة زميلك X لكن اكثر ب 10 إذاً وجبتك (X + 10) ومجموعهما 90 ، إذاً تصبح المعادلة كالتالي :

$X + X + 10 = 90$ نجمع الحدود المتشابهة

$2X + 10 = 90$

$2X + 10 - 10 = 90 - 10$ ننقص من الطرفين 10

$2X = 80$

$\frac{2X}{2} = \frac{80}{2}$ نقسم الطرفين على 2

$X = 40$ سعر وجبة الزميل

للتحقق نعوض في $X + X + 10 = 90$

$40 + 40 + 10 = 90$

المساواة صحيحة اذا الحل صحيح

معادلات تتضمن متغيرات في طرفيها :

◄ $5x + 1 = 2x - 3$
بنفس طريقة الحل وضع المتغيرات على طرف و الثوابت على طرف

$5x - 2x + 1 = 2x - 2x - 3$ نطرح 2x من الطرفين (للتسهيل ننقل المقدار الاصغر

$3x + 1 = -3$ نطرح 1 من الطرفين

$3x + 1 - 1 = -3 - 1$

$3x = -4$ نقسم الطرفين على 3 للتخلص منها

$$\frac{3X}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

◄ انطلقت سيارة من الرياض إلى مكة بسرعة 60km/h و انطلقت بعدها بنصف ساعة سيارة اخرى بسرعة 80km/h فبعد كم دقيقة سيلتقيان ؟

المسافة = السرعة × الزمن

ف ١ = 60 × الزمن

ف ٢ = 80 × (الزمن – 0.5) ننقص من الزمن نصف ساعة

عندما يلتقيان تكون المسافة اللي قطعوها متساوية إذا ف١ = ف ٢

نرمز للزمن t

60 t = 80 (t – 0.5) معادلة تتضمن متغيرين في طرفيها

60 t = 80 t – 40 التوزيع ضرب 80 في طرفي القوس

60 t – 80 t = - 40 نضع المتغيرات على طرف والثوابت على طرف

-20 t = - 40

$$\frac{-20\,t}{-20} = \frac{-40}{-20}$$

T = 2 اذاً الزمن ساعتين منذ انطلاق السيارة الأولى

والسيارة الثانية انطلقت بعدها بنصف ساعة

$t - 0.5 = 2 - 0.5 = 1.5$

فسيكون وقت التقائهم بعد **ساعة ونصف**(90 *دقيقة)* من اطلاق الثانية .

بعض المعادلات لا حل لها ،

مثال :

◄5x + 6 = 5x + 7 *نضع المتغيرات في طرف والثوابت في طرف*

5x +6 -6 = 5x +7 -6 *ننقص من الطرفين* 6

5x = 5x + 1

5x-5x = 5x-5x +1 *ننقص من الطرفين* 5x

1 = 0 وهذه مساواة مستحيلة ، إذا معادلة ليس لها حل

حل المعادلات بالتعويض :

مثال ١ استعمال مجموعة التعويض

أوجد مجموعة حل المعادلة ٢ك + ٥ = ١٣ إذا كانت مجموعة التعويض هي {٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

استعمل الجدول المجاور لتجد الحل.

عوِّض عن ك في المعادلة ٢ ك + ٥ = ١٣ بجميع قيم مجموعة التعويض. بما أن المعادلة صحيحة عندما ك = ٤، فإن حل المعادلة ٢ك + ٥ = ١٣ هو ك = ٤ وتكون مجموعة الحل: {٤}.

ك	٢ك + ٥ = ١٣	صحيح أم خطأ؟
٢	٢(٢) + ٥ = ١٣	خطأ
٣	٢(٣) + ٥ = ١٣	خطأ
٤	٢(٤) + ٥ = ١٣	صحيح
٥	٢(٥) + ٥ = ١٣	خطأ
٦	٢(٦) + ٥ = ١٣	خطأ

حل معادلات تتضمن أعداد متتالية :

مفهوم أساسي الأعداد الصحيحة المتتالية أضف إلى مطويتك

النوع	التعبير اللفظي	الرموز	مثال
أعداد صحيحة متتالية	أعداد مرتبة بترتيب العدّ	ن، ن+١، ن+٢، ...	...، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ....
أعداد صحيحة زوجية متتالية	عدد صحيح زوجي يتبعه العدد الصحيح الزوجي الآتي.	ن، ن+٢، ن+٤، ... حيث (ن زوجي)	...، -٢، ٠، ٢، ٤، ...
أعداد صحيحة فردية متتالية	عدد صحيح فردي يتبعه العدد الصحيح الفردي الآتي.	ن، ن+٢، ن+٤، ... حيث (ن فردي)	...، -١، ١، ٣، ٥، ...

◄ أوجد ثلاثة أعداد فردية متتالية مجموعها -51

نفرض أن العدد الفردي الاصغر x ، *العدد الذي يليه* هو (x+1) وهو زوجي لا نريده ، نريد العدد الفردي الذي يليه فهو (*x+2*) والذي يليه *(x+4)*

وتكون المعادلة على الصورة :

$$X + (x + 2) + (x + 4) = -51$$

$3X + 6 = -51$ *جمعنا الحدود المتشابهه*

$$3x +6 - 6 = -51 -6$$

$$3x = - 57$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-57}{3}$$

$X = - 19$ إذاً العدد الفردي الأصغر *-19*

بذلك الذي يليه -17 *والذي يليه* -15 (الاعداد السالبة كلما كبر العدد قلت قيمته)

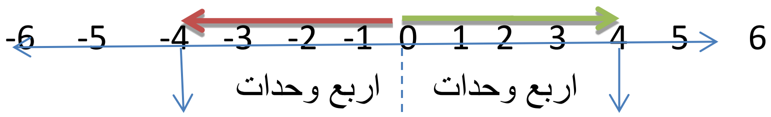
للتحقق : $- 51 = (-19)+(-17)+(-15)$

خاص بالمستوى 2

حل معادلات تتضمن القيمة المطلقة :

$|x|$ رمز القيمة المطلقة وهي تعبر عن عدد الوحدات

◄ مثال $|x| = 4$ تعني ان x تبعد عن الصفر *4* وحدات



فإذا كانت $|x| = 4$ فهذا يعني أن x=4 او x= -4

ومجموعة حل هذه المعادلة = { 4 , -4 } .

في هذه المعادلات يجب ان نحصل على حلين بالموجب والسالب

مفهوم أساسي — معادلات القيمة المطلقة — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: عند حل معادلات تتضمن قيمًا مطلقة هنالك حالتان يجب أخذهما في الحسبان:

الحالة ١: العبارة داخل رمز القيمة المطلقة موجبةً أو صفرًا.

الحالة ٢: العبارة داخل رمز القيمة المطلقة سالبةً.

الرموز: لأي عددين حقيقيين أ، ب إذا كانت |أ| = ب فإن أ = ب، أو أ = − ب .

مثال: |د| = ١٠ إذن د = ١٠ أو د = −١٠

حل المعادلات التالية ومثلها بيانيا :

■ $|x + 5| = 17$ عدد الوحدات *17* ، ويوجد حلين :

$(x + 5) = 17$, $-(x + 5) = 17$

$x = 17 - 5$, $x + 5 = -17$

$x = 12$, $x = -17 - 5 \rightarrow x = -22$

◄ $|x - 1| = -3$

ناتج القيمة المطلقة يستحيل ان يكون سالب، لذلك الحل هو المجموعة الخالية Ø

◄يجب حفظ أحد الأدوية بحرارة 8^o *بزيادة او نقصان مقدارها* 3^o

اوجد درجة الحرارة العظمى و الصغرى التي يمكن حفظ الدواء بها .

الصغرى 8 – 3 = 5 العظمى 8+3 =11

مجموعة الحل { 5 , 11 }

المعادلات الخطية : هي المعادلات من الدرجة الاولى (اس أي متغير هو *1*) ،، ،
بحيث انه في كل حد متغير واحد او حد ثابت .

المعادلة الخطية هي المعادلة التي تمثل بيانيًا بخطٍ مستقيم، وتكتب على الصورة: أ س + ب ص = جـ وتسمى **الصورة القياسية** للمعادلة الخطية. ويسمى جـ **الحد الثابت**، وتمثل أ س ، ب ص الحدود الجبرية.

مفهوم أساسي — **الصورة القياسية للمعادلة الخطية** — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: الصورة القياسية للمعادلة الخطية هي: أ س + ب ص = جـ ، أ ≥ ٠ ولا تكون قيمتا أ و ب معًا صفرًا . أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة والعامل المشترك الأكبر لها ١ .

الأمثلة: في المعادلة: ٣ س + ٢ ص = ٥، أ = ٣ ، ب = ٢ ، جـ = ٥
وفي المعادلة: س = -٧ ، أ = ١ ، ب = صفر ، جـ = -٧

تمييز المعادلات الخطية :

بين فيما اذا كانت المعادلات التالية خطية ام لا .؟

- $x = 2y + 1$

نضعها على الصورة القياسية $x - 2y = 1$

معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين وكل حد به متغير واحد إذا" هي معادلة خطية

- $x + 2xy = -6$

معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين ولكن احد الحدود يوجد به متغيرين معا" 2xy ، اذا" معادلة غير خطية .

- $x^2 = 9y$

معادلة من الدرجة الثانية ، غير خطية

تمثيل المعادلات الخطية بيانيا" :

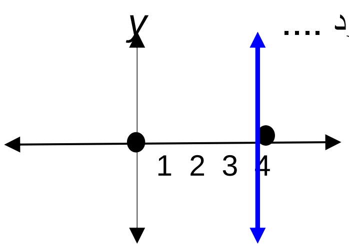
أي معادلة خطية تمثل بخط مستقيم ،،،
في أي رسم بياني يجب ان يكون لدينا نقطتين (*x,y*) وتسمى بالزوج المرتب وترسم على المستوى الاحداثي :

التمثيل بمعرفة المقطع الصادى والسيني :

مثال : مثلي بيانيا" المعادلات التالية :

- X = 4

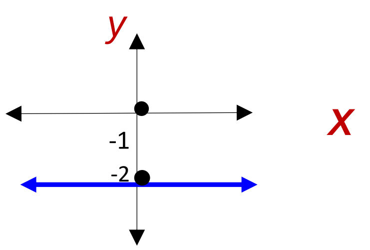
نلاحظ انها معادلة من الدرجة الاولى إذا" خطية ستمثل بخط مستقيم ،
الان نوجد الزوج المرتب : نلاحظ انها معادلة بمجهول واحد وهو *x*
ويساوي *4* و المجهول الاخر *y* يساوي صفر لأنه غير موجود ....
إذا" الزوج المرتب سيكون : (4,0)



يكون الحل عبارة عن خط مستقيم يقطع محور السينات في النقطة x=4 يسمى (المقطع السيني)، وعمودي على المحور y

- Y = - 2

معادلة من الدرجة الاولى إذا" خطية ستمثل بخط مستقيم ،
نوجد الزوج المرتب : نلاحظ انها معادلة بمجهول واحد و هو y يساوي 2-
و المجهول الاخر x يساوي صفر لأنه غير موجود ....
إذا" الزوج المرتب سيكون : (0,-2)



يكون الحل عبارة عن خط مستقيم يقطع محور الصادات في النقطة y= -2 يسمى (المقطع الصادي)، و عمودي على المحور x

- $2x + 4y = 16$

معادلة من الدرجة الاولى ستمثل بخط مستقيم (هذه المرة تحتوي على مجهولين إذا" سيكون هناك مقطعين(سيني وصادي) لن يكون عمودي على احد المحورين، سيكون مائل ،،، المقطع السيني و الصادي غير معلوم لذلك سنحددهما بالطريقة التالية

لإيجاد المقطع السيني نعوض في المعادلة عن y بالصفر ثم ايجاد قيمة x
لإيجاد المقطع الصادي نعوض في المعادلة عن x بالصفر ثم ايجاد قيمة y

*نوجد المقطع السيني نضع $y = 0$

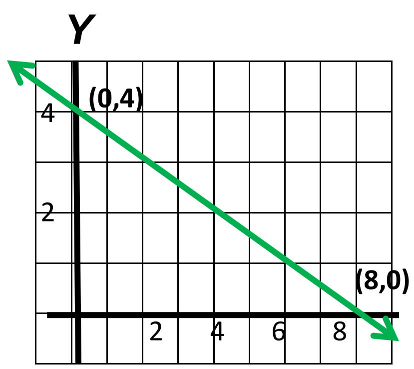
$$2x + 4(0) = 16 \quad \to \quad 2x = 16 \quad \to \frac{2x}{2} = \frac{16}{2} \quad \to x = 8$$

$X=8$ هذا يعني ان المستقيم يقطع محور السينات في النقطة $(8,0)$

*نوجد المقطع الصادي نضع $x=0$

$$2(0) + 4y = 16 \ \to 4y = 16 \ \to \frac{4y}{4} = \frac{16}{4} \ \to y = 4$$

$Y=4$ المستقيم يقطع محور الصادات في النقطة $(0,4)$
نعينهما في المستوى الاحداثي ثم نوصل بينها



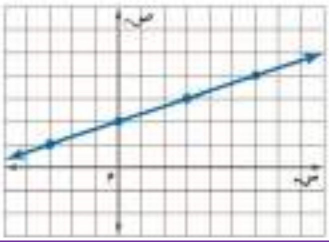
بعض المعادلات لا يكفي ايجاد المقطعين السينى والصادى لرسمها ،
مثل: $X = Y$, $X = 2Y$, $Y = 6X$ حيث اننا كلما عوضنا قيمة احد المتغيرين بصفر ستكون القيمة الاخرى صفر ايضا" ، لذلك علينا التعويض بعدة نقاط اخرى و تكوين جدول ، #هذه الطريقة تحدد المستقيم بدقة اكبر .

مثال ٥ **التمثيل البياني بتكوين جدول**

مثّل المعادلة ص = $\frac{١}{٣}$س + ٢ بيانيًا.

المجال جميع الأعداد الحقيقية. اختر قيمًا للمجال وكوّن جدولًا. ويفضل عندما يكون معامل س كسرًا أن تختار أعدادًا من المجال تكون من مضاعفات المقام، ثم تكوّن أزواجًا مرتبة وتمثلها بيانيًا.

س	$\frac{١}{٣}$س + ٢	ص	(س، ص)
-٣	$\frac{١}{٣}$(-٣) + ٢	١	(-٣، ١)
٠	$\frac{١}{٣}$(٠) + ٢	٢	(٠، ٢)
٣	$\frac{١}{٣}$(٣) + ٢	٣	(٣، ٣)
٦	$\frac{١}{٣}$(٦) + ٢	٤	(٦، ٤)



حل المعادلات الخطية بيانيا" :

يكون بجعل المعادلة على طرف ويكون الطرف الاخر= صفر ، ثم نفرض نقاط للمتغير ونعوض بها في المعادلة لإيجاد النقطة الاخرى

مثال : اوجد حل المعادلة التالية بطريقتين مختلفة : $3x + 1 = -2$

الحل جبريا" : $3x + 1 - 1 = -2 - 1 \rightarrow 3x = -3$

$$\rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-3}{-3} \qquad \rightarrow x = -1$$

الحل بيانيا" :

أوجد الدالة المرتبطة، وأعد كتابة المعادلة بحيث يكون طرفها الأيسر صفرًا.

٣س + ١ = -٢ المعادلة الأصلية

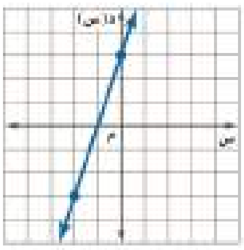
٣س + ١ + ٢ = -٢ + ٢ أضف ٢ إلى الطرفين

٣س + ٣ = ٠ بسّط

وبذلك تكون الدالة المرتبطة هي: د(س) = ٣س + ٣

ولتمثيل الدالة بيانيًا كوّن جدولًا.

س	د(س) = ٣س + ٣	د(س)	(س، د(س))
-٢	د(-٢) = ٣ × -٢ + ٣	-٣	(-٢، -٣)
٠	د(٠) = ٣ × ٠ + ٣	٣	(٠، ٣)



الخط المستقيم الذي يمثل الدالة يقطع محور السينات عند -١، لذا فإن الحل هو س = -١.

الميــل :

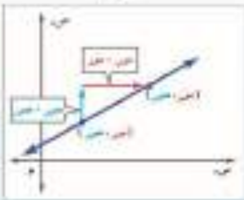
مفهوم أساسي — الميل

التعبير اللفظي: ميل المستقيم غير الرأسي هو نسبة التغير الرأسي إلى التغير الأفقي.

الرموز: يمكن إيجاد الميل (م) للمستقيم غير الرأسي المار بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ على النحو الآتي:

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \begin{matrix} \leftarrow \text{التغير في ص} \\ \leftarrow \text{التغير في س} \end{matrix}$$

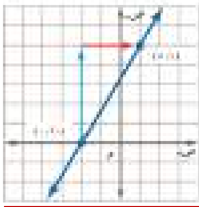
الرسم



مثال ٤ — الميل الموجب أو السالب أو الصفر

أوجد ميل المستقيم المارّ بكل نقطتين من النقاط الآتية:

أ) $(-٢ ، ٠)$ ، $(١ ، ٥)$

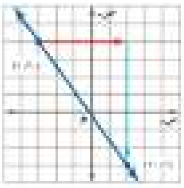


$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ← $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$= \frac{٥ - ٠}{١ - (-٢)}$ ← $(-٢ ، ٠) = (س_١ ، ص_١)$ ، $(١ ، ٥) = (س_٢ ، ص_٢)$

$= \frac{٥}{٣}$ ← بسّط

ب) $(-٣ ، ٤)$ ، $(٢ ، -٣)$

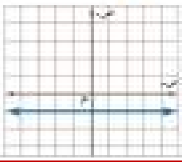


$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ← $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$= \frac{-٣ - ٤}{٢ - (-٣)}$ ← $(-٣ ، ٤) = (س_١ ، ص_١)$ ، $(٢ ، -٣) = (س_٢ ، ص_٢)$

$= \frac{-٧}{٥} = -\frac{٧}{٥}$ ← بسّط

جـ) $(-٣ ، -١)$ ، $(٢ ، -١)$



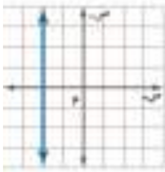
$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ← $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$= \frac{-١ - (-١)}{٢ - (-٣)}$ ← عوّض

$= \frac{٠}{٥} = ٠$ ← بسّط

مثال ٥ — الميل غير المعرّف

أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-٢ ، ٤)$ ، $(-٢ ، -٣)$:



$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ← $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

$= \frac{-٣ - ٤}{-٢ - (-٢)}$ ← عوّض

$= \frac{-٧}{٠}$ أو غير معرّف ← بسّط

مفهوم أساسي — الميل

الميل موجب	الميل سالب	الميل صفر	الميل غير معرف

تمثيل المعادلة بصيغة الميل والمقطع :

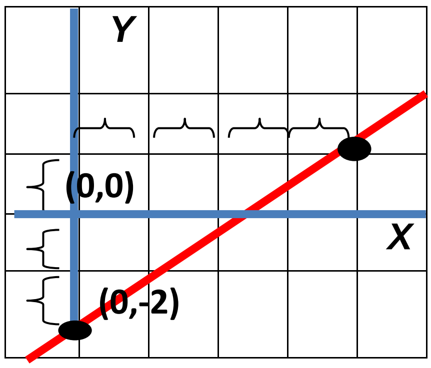
عند تمثيل المعادلة بيانيا" بمعلومية الميل و المقطع فإن الميل يحوي (تغير رأسي و افقي)

إذا كان التغير الرأسي موجبا" فإن الحركة ستكون للأعلى واذا كان سالب ستكون للأسفل ، و اذا كان التغير الافقي موجبا" فإن الحركة ستكون لليمين واذا كان سالب ستكون لليسار .

- مثال : اكتب معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{3}{4}$ ومقطعه الصادي= 2- بصيغة الميل والمقطع، ثم مثلها بيانيا" .

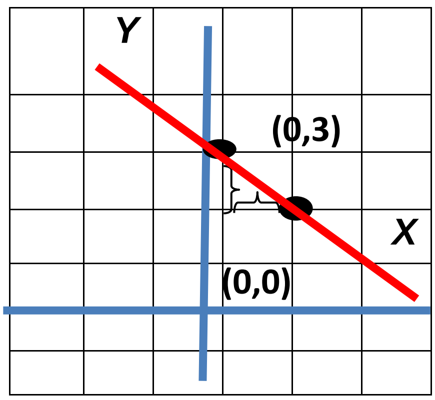
الصيغة العامة $Y = x\,m + b$

$Y = x\frac{3}{4} - 2$ الان نمثلها بيانيا :نعين النقطة *(0,-2)* التي تمثل المقطع الصادي ،



الميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الافقي}} = \frac{3}{4}$ ، *نتحرك من النقطة* (0,-2) بمقدار *3* وحدات إلى اعلى (رأسي) و 4 وحدات الى اليمين (افقي) لأنه موجب تحركنا يمين ،،، ثم نعين النقطة الجديدة . ارسم خط مستقيم يمر بهاتين النقطتين.

- **مثال :** : اكتب معادلة المستقيم الذي ميله 1—ومقطعه الصادي = *3* بصيغة الميل والمقطع، ثم مثلها بيانيا" ؟
- نضع المعادلة على الصورة العامة: $y = -x + 3$



الميل = $\frac{\text{تغير رأسي}}{\text{تغير افقي}} = \frac{-1}{1}$ (اذا لم يوجد مقام فإن المقام = *1* دائما")

نحدد النقطة *(0,3)* ثم نتحرك للاسفل(لانه سالب) وحده واحده (رأسي) ولليمين وحده واحده (افقي)، ونحدد النقطة الجديدة ثم نوصل النقطتين بخط مستقيم

كتابة المعادلة بصيغة الميل والمقطع :

الصورة العامة ***Y= mx + b***

♣اذا علم ميله ونقطة عليه:

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (2,1) *وميله* 3

نحتاج للمقطع الصادي

Y=m x + b

Y =3(2)+b   *نعوض بالنقطة* x

1=6+b   *نعوض بالنقطة* y

b=-5

نعوض في المعادلة الاساسية

Y= 3x -5

♣اذا علمت نقطتان عليه

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين (2,-4) (3,1)

نوجد الميل $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-4-1}{2-3} = \frac{-5}{-1} = 5$

نستعمل أي من النقطتين لايجاد المقطع الصادي

Y=mx+b → 1=5(3)+b →b= -14

الان نكتب المعادلة بصيغة الميل و المقطع

Y= mx +b

Y= 5x-14

كتابة المعادلة بصيغة الميل ونقطة :

الصورة العامة $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,-2) *وميله* $\frac{1}{4}$ *بصيغة الميل ونقطة*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \quad \rightarrow\rightarrow \quad y - (-2) = \frac{1}{4}(x - 3)$$

$$y + 2 = \frac{1}{4}(x - 3)$$

ملخص المفهوم كتابة المعادلات

مطويتك

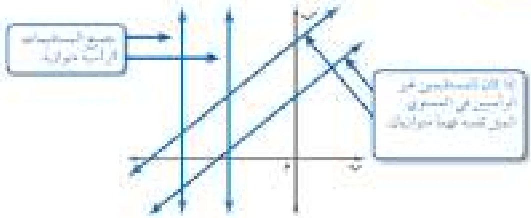
المعطى: الميل ونقطة	المعطى: نقطتان
الخطوة ١: عوّض عن قيم م، س١، ص١ في المعادلة: ص − ص١ = م (س − س١)، أو عوّض عن قيم م، س، ص في صيغة الميل والمقطع وحلها لإيجاد قيمة ب.	الخطوة ١: أوجد الميل.
الخطوة ٢: أعد كتابة المعادلة بالصيغة المطلوبة.	الخطوة ٢: اختر إحدى النقطتين.
	الخطوة ٣: اتبع الخطوات نفسها الواردة في كتابة معادلة المستقيم إذا عُلم الميل ونقطة.

إرشادات للدراسة

الميل: يظل الميل ثابتاً عند أي نقطتين على المستقيم، ويمكن تسمية أي منهما (س١، ص١) والأخرى (س٢، ص٢).

المستقيمات المتوازية والمتعامدة:

المستقيمان المتوازيان: المستقيمان الواقعان في المستوى نفسه ولا يقطع أحدهما الآخر يسميان **مستقيمين متوازيين**، ويكون لهما الميل نفسه.



مثال ١ **المستقيم المار بنقطة معطاة ويوازي مستقيماً معلوماً**

اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٣، ٥) والموازي للمستقيم ص = ٢س - ٤.

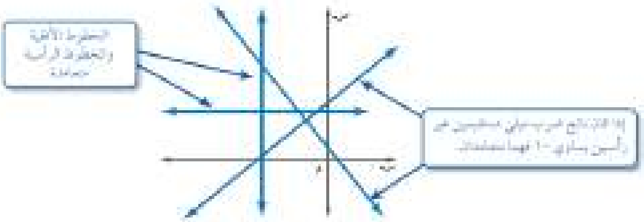
الخطوة ١: بما أن ميل المستقيم ص = ٢س - ٤ يساوي ٢، فإن ميل المستقيم الموازي له يساوي ٢ أيضاً.

الخطوة ٢: أوجد المعادلة العامة للمستقيم بصيغة الميل والمقطع

ص - ص١ = م(س - س١)	صيغة الميل ونقطة
ص - ٥ = ٢[س - (-٣)]	عوّض عن م بـ ٢، وعن (س١، ص١) بـ (-٣، ٥)
ص - ٥ = ٢(س + ٣)	بسّط
ص - ٥ = ٢س + ٦	خاصية التوزيع
ص - ٥ + ٥ = ٢س + ٦ + ٥	أضف (٥) إلى كل طرف
ص = ٢س + ١١	بسّط

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع هي: ص=٢س+١١

المستقيمان المتعامدان: المستقيمان اللذان يتقاطعان مكوِّنَين زوايا قوائم يسميان **مستقيمين متعامدين**، ويكون ميل كل منهما معكوس مقلوب الآخر. فمثلاً إذا كان ميل أحدهما ٤، فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $-\frac{١}{٤}$



باستعمال الميل يمكنك تحديد هل المستقيمان متعامدان أم لا.

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤، ٦)، والعمودي للمستقيم ٢س + ٣ص = ١٢ بصيغة الميل والمقطع.

الخطوة ١: أوجد ميل المستقيم المعطى بإيجاد قيمة ص

٢س + ٣ص = ١٢	المعادلة الأصلية
٢س - ٢س + ٣ص = - ٢س + ١٢	اطرح ٢س من كلا الطرفين
٣ص = -٢س + ١٢	بسّط
$\frac{٣ص}{٣} = \frac{-٢س + ١٢}{٣}$	اقسم كل طرف على ٣
ص = $-\frac{٢}{٣}$س + ٤	بسّط

الميل = $-\frac{٢}{٣}$

الخطوة ٢: ميل المستقيم المعامد للمستقيم المعطى هو معكوس مقلوب العدد $-\frac{٢}{٣}$، أي $\frac{٣}{٢}$. أوجد معادلة المستقيم العمودي.

ص - ص١ = م(س - س١)	صيغة الميل ونقطة
ص - ٦ = $\frac{٣}{٢}$(س - (-٤))	(س١، ص١) = (-٤، ٦)، م = $\frac{٣}{٢}$
ص - ٦ = $\frac{٣}{٢}$(س + ٤)	بسّط
ص - ٦ + ٦ = $\frac{٣}{٢}$س + ٦ + ٦	طبّق خاصية التوزيع، ثم أضف ٦ إلى كل طرف
ص = $\frac{٣}{٢}$س + ١٢	بسّط

معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع هي: ص = $\frac{٣}{٢}$س + ١٢

<u>انظمة المعادلات</u> : هي عبارة عن معادلتين بمجهولين نقوم بحلها و ايجاد قيمة المجهولين ونضعهما على شكل زوج مرتب الذي يسمى حل النظام .

مثال : $10x = y$, $4x + 1500 = y$

<u>حل انظمة المعادلات الخطية :</u>

١) **بيانيا"** : معرفة عدد الحلول الممكنة بيانيا

مفهوم أساسي — الحلول الممكنة — أضف إلى مطويتك

عدد الحلول	واحد فقط	عدد لا نهائي	لا يوجد حل
المصطلح	متسق ومستقل	متسق وغير مستقل	غير متسق
التمثيل البياني			

◄مثال: مثل النظام التالي بيانيا و اوجد عدد حلوله ،

$y = -3x + 10$, $y = x - 2$

لتمثيل المعادلة بيانيا ايجاد المقطع الصادي والسيني لكل معادلة

♣المعادلة الاولى : المقطع الصادي نضع $x = 0$

$$y = -3(0) + 10 \rightarrow \boldsymbol{y = 10}$$

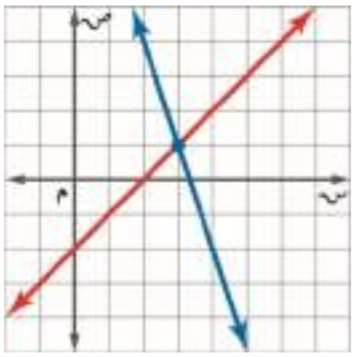
السيني نضع $y=0$

$$0 = -3x + 10 \rightarrow 0 - 10 = -3x + 10 - 10$$

$$\rightarrow -10 = -3x \rightarrow \frac{-10}{-3} = \frac{-3x}{-3} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{10}{3}}$$

♣المعادلة الثانية : الصادي صفر $0 = x - 2 \rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

السيني صفر $y = 0 - 2 \rightarrow \boldsymbol{y = -2}$



يظهر من الرسم انه يوجد حل واحد فقط (متسق مستقل)

يظهر من التمثيل البياني ان المستقيمين يتقاطعان في النقطة

$(3,1)$ و هذا هو حل النظام .

ويمكن التحقق بالتعويض عن $x=3, y=1$ في المعادلتين والتأكد من صحتها

٢)بالتـــعويض :

مفهوم أساسي — **الحل بالتعويض** — أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: حل إحدى المعادلتين على الأقل باستعمال أحد المتغيرين إذا كان ذلك ضروريًا.

الخطوة ٢: عوض المقدار الناتج من الخطوة (١) في المعادلة الثانية، ثم حلها.

الخطوة ٣: عوض القيمة الناتجة من الخطوة (٢) في أي من المعادلتين وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

◄ استعمل التعويض لحل النظام التالي :

$Y+1 = 2x+2$, $3x+y = -9$

نحل احدى المعادلتين وذلك بجعل احد المتغيرين على طرف ،

$y=2x+1$ $Y+1-1 = 2x+2-1$

ثم نعوض بقيمة y في المعادلة الاخرى ،

$3x+(2x+1) = -9$

$5x+1=-9 \rightarrow 5x=-10 \rightarrow x=-2$ (راجع حل المعادلات)

الان نعوض بقيمة x في احد المعادلتين لإيجاد قيمة y

$y+1=2(-2)+2$ $Y+1 = 2x+2$

$y+1=-2$

$Y=-3$ اذا" حل النظام $(-2,-3)$

٣)بالحذف باستعمال الجمع و الطرح:

مفهوم أساسي — **الحل بالحذف** — أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: اكتب النظام على أن يكون الحدان المتشابهان اللذان معامل أحدهما معكوس للآخر أو مساوٍ له بعضهما فوق بعض.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوض القيمة الناتجة في الخطوة ٢ في إحدى المعادلتين وحلها لإيجاد المتغير الثاني، واكتب الحل كزوج مرتب.

استعمل الحذف لحل النظام التالي :

$4x+6y=32$

$3x-6y=3$

بما ان معاملي y معكوسا بعضهما نجمع المعادلتين

(وان كانا متساويان نطرح المعادلتين (للتخلص من y))

$$\begin{array}{r} 4x+6y=32 \\ +\quad 3x-6y=3 \\ \hline 7x \quad =35 \end{array}$$

ثم نحل المعادلة الناتجة

$X = 5$

ثم نعوض عن $x=5$ في احدى المعادلتين

خاص بالمستوى 2

$-6y=3-15$ $\quad\quad$ $3(5)-6y=3$

$Y=\frac{-12}{-6}$

$Y=2$ $\quad\quad$ اذا" حل النظام (5,2)

٤)الحل بالحذف باستعمال بالضرب

مفهوم أساسي — الحل بالحذف — أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: اضرب إحدى المعادلتين على الأقل في عددٍ ثابت للحصول على معادلتين فيهما حدان أحدهما معكوس للآخر.

الخطوة ٢: اجمع المعادلتين أو اطرحهما للتخلص من أحد المتغيرين، ثم حل المعادلة.

الخطوة ٣: عوض عن قيمة المتغير الناتجة في الخطوة (٢) في إحدى المعادلتين، وحلها لإيجاد قيمة المتغير الثاني، واكتب الحل في صورة زوج مرتب.

◄مثال استعمل الحذف لحل النظام:

$5x+6y=-8$

$2x+3y=-5$

نضرب المعادلة الثانية في 2 - $\quad\quad$ لان (3 من عوامل 6)

$-4x-6y=10$

ثم نجمعها مع الأولى

$-4x-6y=10$

$+\quad 5x+6y=-8$

$X=2$

ثم عوض بقيمة في احدى المعادلتين

$2(2)+3y=-5 \quad \rightarrow \quad y=-3$

حل النظام (2 , -3)

تحديد افضل طريقة لحل نظام من معادلتين

الطريقة	أفضل حالة لاستعمالها
التمثيل البياني	لتقدير الحلول، فالتمثيل البياني لا يعطي في الغالب حلًّا دقيقًا.
التعويض	إذا كان معامل أحد المتغيرين في إحدى المعادلتين ١ أو −١.
الحذف باستعمال الجمع	إذا كان كل من معاملي أحد المتغيرين في المعادلتين معكوسًا جمعيًّا للآخر.
الحذف باستعمال الطرح	إذا كان معاملا أحد المتغيرين في المعادلتين متساويين.
الحذف باستعمال الضرب	إذا لم يكن أي من المعاملات (١) أو (−١)، وليس من السهل التخلص من أحد المتغيرين بجمع المعادلتين أو طرحهما.

المتباينات (المتراجحات) :

تسمى الجملة الرياضية التي تشتمل الرموز : $\{ <\ ,\ >\ ,\ \leq\ ,\ \geq \}$ بالمتباينة .

حيث : $a < b$ تعني ان b اكبر من a و a اصغر من b
$a \leq b$ تعني ان b اكبر من او يساوي a و a اصغر من او يساوي b

مثال : ◄يجب أن يقل وزن اللاعب عن 80 كلجم
نرمز للوزن x .... $x < 8$

◄ يجب ان لا يقل عمر الطفل عن 6 سنوات للدخول إلى المدرسة .
نرمز للعمر ب x .... $x \geq 6$ (عمر الطفل 6 سنوات او اكبر)

التمثيل البياني للمتباينات :

العمليات على المتباينات :

مشابهه جدا للمعادلات وتحل بنفس طريقة حل المعادلات باستثناء فرق وحيد وهو عند الضرب او القسمة في عدد سالب حيث تتغير اشارة المتباينة للعكس .

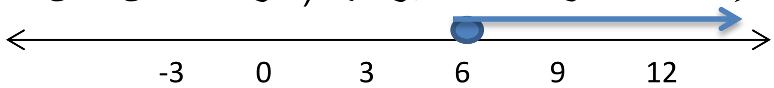
١) الجمع والطرح :

إذا اضيف او طرح العدد نفسه من طرفي المتباينة فإن المتباينة تبقى صحيحة كما هي .

◄مثال : حل المتباينة ومثلها بيانيا : $3X+6 \leq 4X$

بنفس طريقة حل المعادلات $3X+6-3X \leq 4X-3X$

$6 \leq X$ ، إذاً الحل 6 و الأعداد الأكبر منها (دائرة مغلقة لان 6 من ضمن الحل)



الضرب والقسمة للمتباينات :

إذا ضرب او قسم عدد نفسه اشارته موجبه من طرفي المتباينة فإنها تبقى صحيحة كما هي .
اما اذا كان العدد سالب فإن اشارة التباين تتغير للعكس .

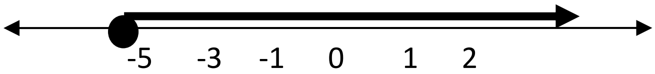
◄ مثال حل المتباينة $-11x - 13 \leq 42$ ؟

$$-11x - 13 + 13 \leq 42 + 13$$

$$-11x \leq 55$$

عند القسمة على سالب يتغير اتجاه المتباينة $\frac{-11x}{-11} \geq \frac{55}{-11}$

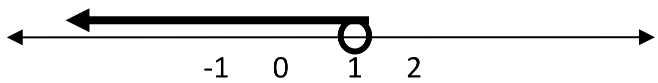
$$x \geq -5$$



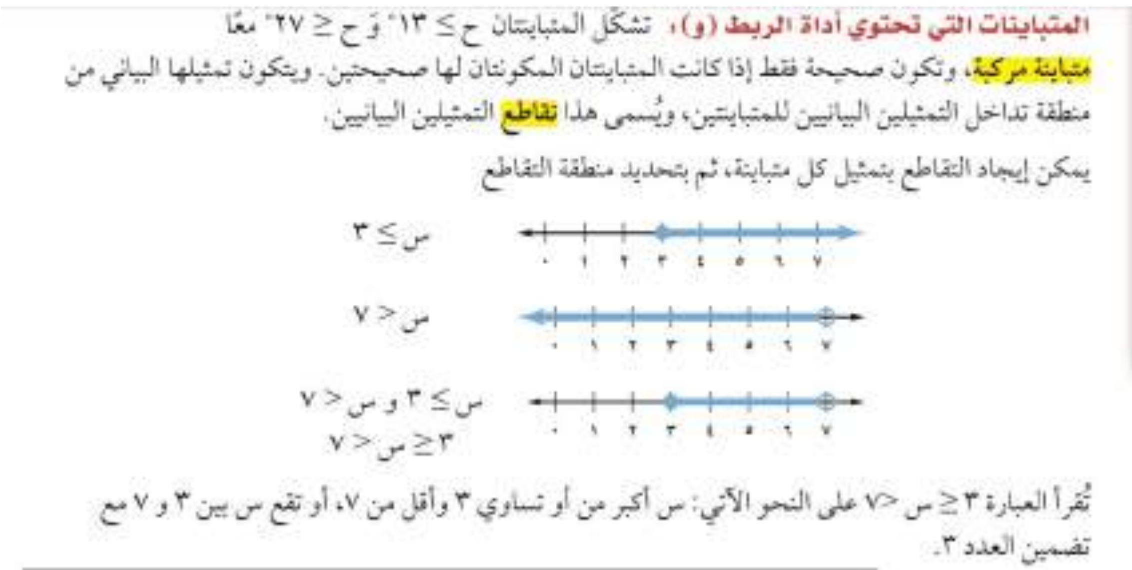
◄ مثال حل المتباينة $2x + 4 < 6$ ؟

$$2x + 4 - 4 < 6 - 4$$

$$2x < 2 \quad \rightarrow \quad \frac{2x}{2} < \frac{2}{2} \quad \rightarrow x < 1$$



المتباينة المركبة: هي اللي تحتوي على متباينتان (الحل محصور بين عددين)



المتباينات التي تحتوي أداة الربط (و): تشكّل المتباينتان "ح ≥ ١٣" و "ح ≤ ٢٧" معًا **متباينة مركبة**، وتكون صحيحة فقط إذا كانت المتباينتان المكونتان لها صحيحتين. ويتكون تمثيلها البياني من منطقة تداخل التمثيلين البيانيين للمتباينتين، ويُسمى هذا **تقاطع** التمثيلين البيانيين.

يمكن إيجاد التقاطع بتمثيل كل متباينة، ثم بتحديد منطقة التقاطع

س ≥ ٣

س < ٧

س ≥ ٣ و س < ٧

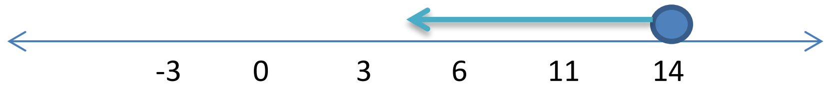
٣ ≤ س < ٧

تُقرأ العبارة ٣ ≤ س < ٧ على النحو الآتي: س أكبر من أو تساوي ٣ وأقل من ٧، أو تقع س بين ٣ و ٧ مع تضمين العدد ٣.

◄مثال : شركة تنتج جهاز لا يقل طوله عن *11*سم ولا يزيد عن *14* سم اكتب المتباينة التي تمثل الاطوال الممكنة لهذا الجهاز ومثلها بيانياً . نفرض ان *الطول =* x

لا يقل عن *11* إذاً طوله *11* والاعداد الاكبر منها $x \geq 11$

لا يزيد عن *14* إذاً طوله : *14* والاعداد الاصغر منها $x \leq 14$



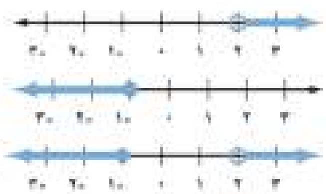
الحل $11 \leq x \leq 14$

المتباينات التي تحتوي أداة الربط (أو)، يحتوي نوع آخرُ من المتباينات المركبة كلمة (أو). وتكون المتباينة المركبة التي تحتوي أداة الربط (أو) صحيحة إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها على الأقل صحيحة. ويتكون تمثيلها البياني من **اتحاد** تمثيل المتباينتين.

س > ٢

س ≤ -١

س > ٢ أو س ≤ -١



عند حل مسائل لفظية على المتباينات استعمل إحدى الإشارتين ≤ أو ≥ عند وجود كلمات تدل على تضمين طرف المتباينة في الحل مثل على الأكثر، على الأقل.
واستعمل إحدى الإشارتين < أو > عند ورود كلمات مثل بين، أقل من، أكثر من.

مثال :

صوت، يمكن أن تسمع أذن الإنسان الأصوات التي لا يقل ترددها عن ٢٠ هرتز ولايزيد على ٢٠٠٠٠ هرتز. اكتب المتباينة المركّبة التي تمثّل الترددات التي لا يسمعها البشر، ومثّلها بيانيًا.

تبين هذه المسألة الترددات التي يسمعها البشر، وعلينا أن نجد الترددات التي لا يسمعها البشر.

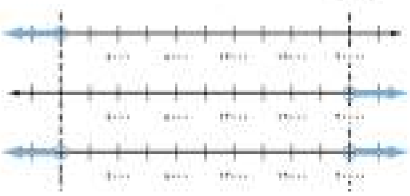
التعبير اللفظي	التردد	أقل من	٢٠ هرتز	أو	التردد أكثر من	٢٠٠٠٠ هرتز
الرموز	افترض أن ل تمثل التردد					
المتباينة	ل	>	٢٠	أو	ل >	٢٠٠٠٠

ثم مثّل مجموعة الحل بيانيًا.

تمثيل ل < ٢٠

تمثيل ل > ٢٠٠٠٠

إيجاد الاتحاد



خاص بالمستوى 2

متباينات القيمة المطلقة :

عند حلها يؤخذ بعين الاعتبار ان المقدار داخل القيمة المطلقة اما سالب او موجب .

◄مثال اوجد قيمة المتباينة التالية ومثلها بيانيا"

$$|x + 2| > 11$$

$(x + 2) > 11$, $(x + 2) < -11$

$x + 2 > 11$, $x + 2 < -11$

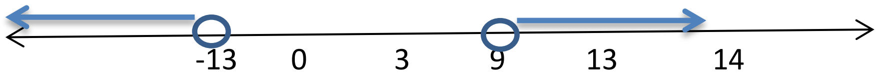
$x > 11 - 2$, $x < -11 - 2$

$x > 9$,

$x > 9$, $x < -13$

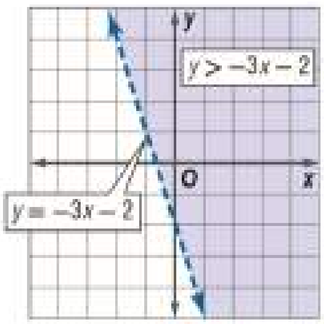
يتغير اتجاه المتباينة لأننا قسمنا على عدد سالب

مجموعة الحل $9 < x < -13$



المتباينات الخطية :

تمثيل المتباينات الخطية بيانياً: تشبه **المتباينة الخطية** المعادلة الخطية، فالفرق بينهما فقط هو وضع رمز المتباينة بدلاً من رمز المساواة. فمثلاً، $y > -3x - 2$ هي متباينة خطية، و $y = -3x - 2$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.



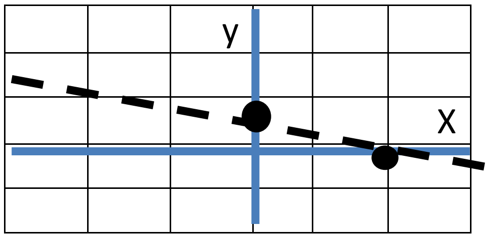
التمثيل البياني للمتباينة $y > -3x - 2$ مبين في الشكل المجاور على صورة منطقة مظللة تسمى **منطقة الحل**، فكل نقطة في المنطقة المظللة تحقق المتباينة، والتمثيل البياني للمستقيم $y = -3x - 2$ هو **حد** منطقة الحل وقد رسم المستقيم بشكل متقطع ليدل على أنه لا يحقق المتباينة. أما إذا احتوت المتباينة على الرمز ≤ أو ≥ فإن النقاط الواقعة على الحد متحقق المتباينة وعندئذ يكون تمثيل المستقيم خطاً متصلاً.

- مثل المتباينة $x + 4y > 2$ بيانيا

$x + 4y = 2 \rightarrow 4y = 2 \rightarrow y = \frac{1}{2}$ ، نضع $x=0$ لإيجاد مقطع y

$x + 4y = 2 \rightarrow x = 2$ نضع $y=0$ لإيجاد مقطع x

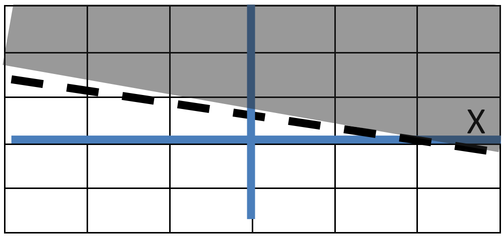
$(2,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ، *نحددها على المستوى ثم نوصل بينهما*



لكي نعرف اتجاه التضليل : فإننا نختبر أي نقطة لا تقع على حد المتباينة (نعوض بها في المتباينة) :(اذا كان الحل صحيح فإن التضليل في اتجاهها اذا كان خاطئ فإن التضليل في الاتجاه الاخر) ، غالبا" نختار النقطة (0,0)

$x + 4y > 2 \rightarrow \mathbf{0 + 4(0) > 2} \rightarrow \mathbf{0 > 2}$

و هذا خاطئ إذا" الظل لا يحوي *(0,0)*



تمثيل متباينة القيمة المطلقة بيانيا" :

(تمثل بخطين دائما" لأن لها حلين موجب وسالب) والحل سيكون منطقة وليس فقط خط

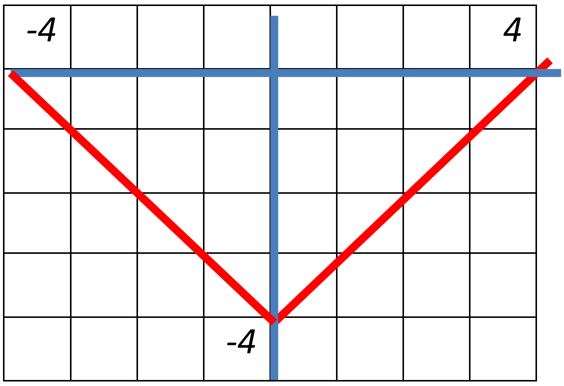
مثل المتباينة $y \geq |x| - 4$

نوجد المقطع الصادي والسيني بوضعهما *0*

$0 \geq |x| - 4 \quad \rightarrow \quad 4 \geq |x| \quad \rightarrow \quad 4 \geq x \geq -4$ المقطع السيني له قيمتين

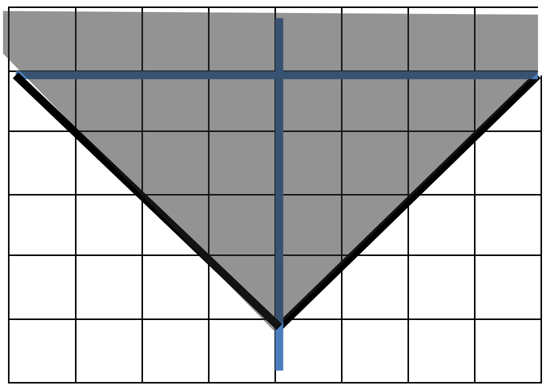
$y \geq |0| - 4 \quad \rightarrow \quad y \geq -4$ المقطع الصادي

وبما ان الاشارة $\geq$ فإن الخط سيكون متصل



والان نختبر النقطة *(0.0)* , $y \geq |x| - 4$

$0 \geq |0| - 4 \quad \rightarrow \quad 0 \geq -4$ ، الحل صحيح اذا" التظليل في اتجاه *(0,0)*



- لو كان حل المعادلة عند النقطة *(0,0)* خاطئ (مثلا" كان $4 \geq 3$) فإن التظليل سيكون في المنطقة اسفل الخطين المنطقة التي لا يوجد بها النقطة *(0,0)*

خاص بالمستوى 2

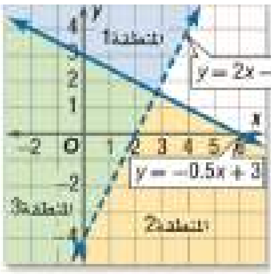
حل انظمة المتباينات خطيا" :

مفهوم أساسي حل أنظمة المتباينات الخطية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 مثّل كل متباينة في النظام بيانيًا.

الخطوة 2 حدّد المنطقة المظللة المشتركة بين مناطق حل متباينات النظام والتي تمثل منطقة حل النظام.



حل النظام الآتي بيانيًا:

$y > 2x - 4$

$y \leq -0.5x + 3$

بتمثيل المتباينتين بيانيًا نجد أن: حلُّ المتباينة $y > 2x - 4$ ← المنطقتان: 1 , 3

حلُّ المتباينة $y \leq -0.5x + 3$ ← المنطقتان: 2 , 3

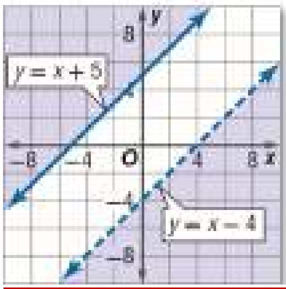
المنطقة 3 هي منطقة مشتركة بين منطقتي حل المتباينتين ، وعليه فتكون هي منطقة حل النظام.

تحقق،

لاحظ أن نقطة الأصل تنتمي إلى منطقة حل النظام، ويمكن استعمال نقطة الأصل نقطة اختبار. والتحقق من صحة الحل بتعويض (0, 0) بدلًا من x, y في كلتا المتباينتين.

$y > 2x - 4$	$y \leq -0.5x + 3$
$0 \overset{?}{>} 2(0) - 4$	$0 \overset{?}{\leq} -0.5(0) + 3$
$0 \overset{?}{>} 0 - 4$	$0 \overset{?}{\leq} 0 + 3$
$0 > -4$ ✓	$0 \leq 3$ ✓

مثال 2 مناطق الحل غير المتقاطعة



حل النظام الآتي بيانيًا:

$y \geq x + 5$

$y < x - 4$

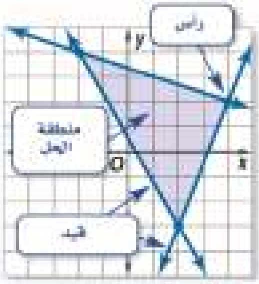
بتمثيل المتباينتين بيانيًا، نجد أن منطقتي الحل لا تتقاطعان، وبالتالي لا توجد نقاط مشتركة بينهما، ولذا فليس للنظام حل. ومجموعة الحل هي ϕ.

خاص بالمستوى 2

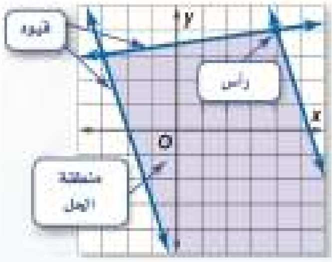
إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة باستخدام المتباينات:

مفهوم أساسي منطقة الحل

أضف إلى مطويتك



إذا كانت منطقة الحل محدودة (مغلقة) أو محصورة بقيود كما في الشكل أعلاه، فإن القيمة العظمى و القيمة الصغرى للدالة تظهر دائمًا عند رؤوس منطقة الحل.

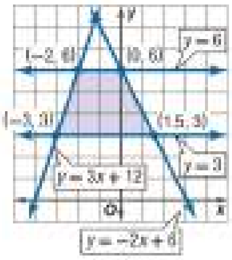


إذا كانت منطقة الحل مفتوحة وممتدة، فهي بذلك غير محدودة، ويمكن أن تحتوي على قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

رمز الدالة
يستعمل الرمز $f(x, y)$ للتعبير عن الدالة في المتغيرين x ، y ، وتقرأ f لـ x و y .

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًا، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$3 \le y \le 6$$
$$y \le 3x + 12$$
$$y \le -2x + 6$$
$$f(x, y) = 4x - 2y$$



الخطوة 1: مثّل المتباينات بيانيًا، وحدّد إحداثيات الرؤوس.

الخطوة 2: جد قيمة الدالة عند كل رأس.

(x, y)	$4x - 2y$	$f(x, y)$	
$(-3, 3)$	$4(-3) - 2(3)$	-18	
$(1.5, 3)$	$4(1.5) - 2(3)$	0	← قيمة عظمى
$(0, 6)$	$4(0) - 2(6)$	-12	
$(-2, 6)$	$4(-2) - 2(6)$	-20	← قيمة صغرى

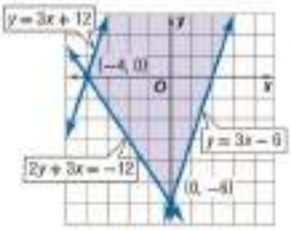
القيمة العظمى للدالة تساوي 0 وتكون عند النقطة $(1.5, 3)$، والقيمة الصغرى للدالة تساوي -20 وتكون عند النقطة $(-2, 6)$.

مثال 2 منطقة الحل غير المحدودة

القيمة العظمى
لا تفترض عدم وجود قيم عظمى إذا كانت منطقة الحل غير محدودة، بل اختبر قيمة الدالة عند كل رأس؛ لتحدّد إذا كان هنالك قيمة عظمى أو صغرى.

مثّل نظام المتباينات الآتي بيانيًا ، ثم حدّد إحداثيات رؤوس منطقة الحل، وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة المعطاة في هذه المنطقة:

$$2y + 3x \ge -12 \text{ , } y \le 3x + 12 \text{ , } y \ge 3x - 6 \text{ , } f(x, y) = 9x - 6y$$



مثّل المتباينات بيانيًا، وأوجد قيمة الدالة عند كل رأس؛ لأن القيمة العظمى أو الصغرى – إن وجدت – تكون عند الرؤوس.

(x, y)	$9x - 6y$	$f(x, y)$
$(-4, 0)$	$9(-4) - 6(0)$	-36
$(0, -6)$	$9(0) - 6(-6)$	36

القيمة العظمى للدالة تساوي 36 وتكون عند النقطة $(0, -6)$، ولا توجد قيمة صغرى للدالة؛ لأن هناك نقطة أخرى في منطقة الحل وهي $(0, 8)$ وتُعطي القيمة -48 للدالة وهي أقل من -36.

المعادلات التربيعية : (المعادلات من الدرجة الثانية)

المعادلات التربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$

☼حل المعادلات التربيعية بالتحليل :

مفهوم أساسي **تحليل $س^{٢}$ + ب س + جـ**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة $س^{٢}$ + ب س + جـ ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما ب وناتج ضربهما جـ ، ثم اكتب $س^{٢}$ + ب س + جـ على الصورة (س + م) (س + ن).

الرموز: $س^{٢}$ + ب س + جـ = (س + م) (س + ن) ، حيث م + ن = ب، م ن = جـ

مثال: $س^{٢}$ + ٦س + ٨ = (س + ٢) (س + ٤). لأن ٢ + ٤ = ٦، ٢ × ٤ = ٨

◄مثال : حل $x^2 + 9x + 20$

نحلل 20 إلى عوامله

عوامل 20	مجموع العاملين
1 , 20	21
2 , 10	12
4 , 5	9

العاملين الذين حققوا الشرط هما 4 ,5 (مجموعهما 9 و حاصل ضربهم 20)

$$x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$$

◄حل المعادلة التالية بالتحليل $x^2 + 2x = 15$

اولا نضع المعادلة على الصورة العامة ننقل الثابت للطرف الاخر

$$x^2 + 2x - 15 = 15 - 15$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

ثانيا نوجد عوامل 15 - ((مراجعة قوانين الاشارات))

عوامل 15 −	مجموع العاملين
-1 , 15	14
-3 , 5	2

العاملين الذين حققوا الشرط 3,5- (ضربهما 15-) وجمعهم 2

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5) = 0$$

يوجد احتمالين ل x :

$$(x-3)=0 \rightarrow x-3+3=0+3 \rightarrow x=3$$

$$(x+5)=0 \rightarrow x+5-5=0-5 \rightarrow x=-5$$

للتأكد من الحل نعوض بقيم في المعادلة الأصلية .

$$x^2+2x=15$$

عند $x=3$ ، $3^2+2(3)=15$ $15=15$ √

عند $x=-5$ ، $(-5)^2+2(-5)=15$ $25-10=15$ √

يوجد حلين صحيحين للمعادلة $3, -5$

مثال ٥ من واقع الحياة **حل المسألة بالتحليل**

تصميم: يصمّم سعيد لوحة إعلان لبيع أقراص مدمجة لتعلم الرياضيات. إذا كان ارتفاع الجزء العلوي من اللوحة ٤ بوصات، ويزيد طول باقي اللوحة على عرضها بـ ٢ بوصة. وَ مساحة اللوحة ٦١٦ بوصة مربّعة، فأوجد عرض اللوحة.

افهم: يجب إيجاد عرض اللوحة.

خطّط: بما أن اللوحة على شكل مستطيل فالمساحة = العرض × الطول

حلّ: بما أن ض = عرض اللوحة. فيكون طول اللوحة = ض + ٤ + ٢ = ض + ٦

ض (ض + ٦) = ٦١٦ اكتب المعادلة

ض^2 + ٦ض = ٦١٦ اضرب.

ض^2 + ٦ض − ٦١٦ = ٠ اطرح ٦١٦ من كل طرف.

(ض + ٢٨) (ض − ٢٢) = ٠ حلل

ض + ٢٨ = ٠ أو ض − ٢٢ = ٠ خاصية الضرب الصفري

ض = −٢٨ ض = ٢٢ حل كل معادلة

بما أن الأبعاد لايمكن أن تكون سالبة، فإن العرض = ٢٢ بوصة

تحقق: إذا كان العرض ٢٢ بوصة فإن المسافة = ٢٢(٢٢ + ٦) = ٦١٦ بوصة مربعة وهي مساحة اللوحة المطلوبة. ✓

المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل :

مفهوم أساسي — تحليل أس^{٢}+ب س+جـ — أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لتحليل ثلاثية حدود على الصورة أس^{٢}+ب س+جـ، أوجد عددين صحيحين م، ن مجموعهما يساوي ب وناتج ضربهما أ جـ، ثم اكتب أس^{٢}+ب س+جـ على الصورة أس^{٢}+م س+ن س+جـ، ثم حلّل بتجميع الحدود.

مثال: ٥س^{٢} − ١٣س + ٦ = ٥س^{٢} − ١٠س − ٣س + ٦   م=−١٠، ن=−٣

= ٥س(س − ٢) + (−٣)(س − ٢)

= (٥س − ٣)(س − ٢)

◄ مثال : حل المعادلة التالية ثم حلها : $7x^2 + 29x + 4 = 0$

نوجد عددين مجموعهما *29* ، وحاصل ضربهما $7\times4 = 28$

نحلل *28* الى عوامله

عوامل *28*	جمعهما
1 , 28	*29*
4 , 7	*11*

إذاً $1, 28$ *حققت المطلوب*

$$7x^2 + 28x + x + 4 = 0$$

$$7x(x + 4) + (x + 4) = 0$$

$$(x + 4)(7x + 1) = 0$$

يوجد احتمالين للحل :

$$(x + 4) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x = -4}$$

$$(7x + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad 7x = -1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{7}}$$

◄ حل العبارة التالية : $4x^2 + 3x + 5$

نوجد عددين مجموعهما 3 وحاصل ضربهما $5\times4 = 20$

عوامل 20

عوامل 20	جمعهما
1,20	21
2,10	12
4,5	9

لا يوجد أي عوامل تحقق الشرط ، إذاً لا يمكن تحليل هذه المعادلة التربيعية

وتسمى **عبارة أولية**

مفهوم أساسي الفرق بين مربعين

أضف إلى مطويتك

الرموز: أ^{٢} − ب^{٢} = (أ + ب)(أ − ب) = (أ − ب)(أ + ب)

أمثلة: س^{٢} − ٢٥ = (س + ٥)(س − ٥) = (س − ٥)(س + ٥)

ن^{٢} − ٦٤ = (ن + ٨)(ن − ٨) = (ن − ٨)(ن + ٨)

مثال ٤ من اختبار

ما القيمة الموجبة لـ س التي تحقق المعادلة ص = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$ ، إذا كانت ص = ٠ ؟

أ) $\frac{-٩}{٤}$ ب) صفر جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٩}{٤}$

اقرأ الفقرة:

عوّض ص بـ صفر، ثم حل المعادلة

حل الفقرة:

ص = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$	المعادلة الأصلية
٠ = س^{٢} − $\frac{٩}{١٦}$	عوض عن ص بـ صفر
٠ = س^{٢} − $(\frac{٣}{٤})^{٢}$	اكتب على صورة أ^{٢} − ب^{٢}
٠ = (س + $\frac{٣}{٤}$)(س − $\frac{٣}{٤}$)	تحليل الفرق بين مربعين
٠ = س + $\frac{٣}{٤}$ أو ٠ = س − $\frac{٣}{٤}$	خاصية الضرب الصفري
س = $\frac{-٣}{٤}$ س = $\frac{٣}{٤}$	الإجابة الصحيحة جـ

المربعات الكاملة :

$١٦س^{٢} + ٢٤س + ٩$

هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، لأن $١٦س^{٢} = (٤س)^{٢}$.

هل الحد الأوسط ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعي لكل من الحدين الأول والأخير؟ نعم، لأن $٢٤س = ٢(٤س)(٣)$.

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، لأن $٩ = ٣^{٢}$.

مفهوم أساسي تحليل ثلاثية الحدود التي تشكل مربعاً كاملاً

التعبير اللفظي: $أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢} = (أ + ب)(أ + ب) = (أ + ب)^{٢}$

$أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢} = (أ - ب)(أ - ب) = (أ - ب)^{٢}$

أمثلة: $س^{٢} + ٨س + ١٦ = (س + ٤)(س + ٤) = (س + ٤)^{٢}$

$س^{٢} - ٦س + ٩ = (س - ٣)(س - ٣) = (س - ٣)^{٢}$

حدد ان كانت ثلاثية الحدود تشكل مربع كامل ام لا ، وحللها :

$4X^2 + 12X + 9$

هل الحد الاول مربع كامل؟ نعم ، $4X^2 = (2X)^2$

هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم ، $9 = 3^2$

هل الحد الاوسط يساوي $2(2X)(3)$ ؟ نعم ، $12X=2(2X)(3)$

حل معادلات تتضمن مربعات كاملة :

$$9X^2 - 48X = -64$$

$$9X^2 - 48X + 64 = -64 + 64$$

$9X^2 - 48X + 64 = 0$ (تحقق ان كانت تمثل مربع كامل)

$$(3X)^2 - 2(3X)(8) + (8)^2 = 0$$

$$(3X - 8)^2 = 0$$

$$(3X-8)(3X-8) = 0$$

$$3X-8 = 0$$

$$3X - 8 + 8 = 0 + 8$$

$$3x=8 \rightarrow \quad X = \frac{8}{3}$$

☼حل المعادلات التربيعية باستعمال الجذور :

مفهوم أساسي — **خاصية الجذر التربيعي**

التعبير اللفظي: لحل المعادلة التربيعة على الصورة س^{٢} = ن، خُذ الجذر التربيعي لكل طرف.

الرموز: لأي عدد حقيقي ن ≥ ٠، إذا كان س^{٢} = ن، س = ± √ن .

مثال: س^{٢} = ٢٥

س = ± √٢٥ = ± ٥

حل المعادلة التالية وتحقق من صحة الحل :

$$(X-6)^2 = 81$$

$X - 6 = \pm\sqrt{81}$ *الجذر التربيعي*

$X - 6 = \pm 9$

$X - 6 + 6 = \pm 9 + 6$ *المتغيرات على طرف*

$X = -9+6$ $X = 9+6$ *نفصل المعادلة لمعادلتين*

$X = -3$ $X = 15$

الجذران هما *15 , -3*

نتحقق بالتعويض في المعادلة الاصلية

☼حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع :

مفهوم أساسي — **إكمال المربع**

التعبير اللفظي: لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة س^{٢} + ب س، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: أوجد نصف ب، (معامل س)

الخطوة ٢: ربّع الناتج في الخطوة ١.

الخطوة ٣: أضف الناتج من الخطوة ٢ إلى س^{٢} + ب س.

الرموز: س^{٢} + ب س + $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ = $\left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

◄حل المعادلة بإكمال المربع :

$$x^2 - 6x + 12 = 19$$

$x^2 - 6x = 7$ اطرح ١٢ من الطرفين

$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$ بما ان $9 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2$ ، لذا اضف 9 للطرفين

$(x-3)^2 = 16$ حلل العبارة $x^2 - 6x + 9$

$x - 3 = \pm 4 \quad \rightarrow x = 3 \pm 4$

X = 7 او x = -1

☼حل المعادلات التربيعية بالقانون العام :

مفهوم أساسي القانون العام

حلّ المعادلة التربيعية: أس٢ + ب س + جـ = ٠، حيث أ ≠ ٠ يُعبرّ عنه بالقانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$$

حل المعادلة بالقانون العام :

$$3x^2 + 5x = 12$$

اعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية . $3x^2 + 5x - 12 = 0$

$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ نعوض في القانون العام

$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.3.(-12)}}{2.3}$ بالتبسيط (فك التربيع و الضرب والجمع)

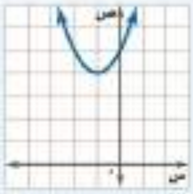
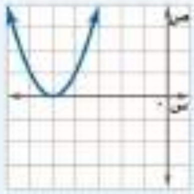
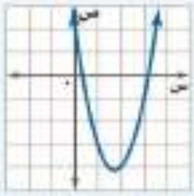
$= \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{6}$

$= \frac{-5 \pm 13}{6}$ يوجد حلان

$$\frac{-5+13}{6} = \frac{4}{3} \quad , \quad \frac{-5-13}{6} = -3$$

في القانون العام ، ما تحت الجذر يسمى المميز

مفهوم أساسي — استعمال المميز — أضف إلى مطويتك

المعادلة	س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠	س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠	٢س^{٢} − ٧س + ٢ = ٠
المميز	ب^{٢} − ٤أجـ = −١٦ سالب	ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ صفر	ب^{٢} − ٤أجـ = ٣٣ موجب
تمثيل الدالة المرتبطة	 عدد المقاطع السينية ٠	 عدد المقاطع السينية ١	 عدد المقاطع السينية ٢
عدد الحلول الحقيقية	٠	١	٢

اوجد المميز للمعادلة ، ثم حدد عدد حلولها :

$$4x^2 + 5x = -3$$

نكتب المعادلة على الصورة القياسية ثم نوجد المميز :

$$4x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 4 \times 3 = -23$$

المميز سالب اذا" لا يوجد حلول حقيقة

تلخيص الفروق بين الدوال الخطية والتربيعية :

	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
الصورة القياسية	ص = أ س + ب	ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ٠
الدرجة	١. لاحظ أن جميع المتغيرات من الدرجة الأولى.	٢. لاحظ أن المتغير المستقل س في الحد الأول هو من الدرجة الثانية، ومعامله أ لا يمكن أن يساوي صفرًا، وإلا أصبحت الدالة خطية.
مثال	ص = ٢س + ٦	ص = ٣س^{٢} + ٥س − ٤
التمثيل البياني	خط مستقيم	قطع مكافئ

خاص بالمستوى 2

التمثيل البيانى للمعادلات التربيعية : (قطع مكافئ)

مفهوم أساسي — الدوال التربيعية

أضف إلى مطويتك

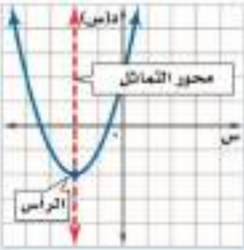
الدالة المولدة (الأم): د(س) = س^{٢}

الصورة القياسية: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

شكل التمثيل: قطع مكافئ

محور التماثل: س = $-\frac{ب}{٢أ}$

المقطع الصادي: جـ



مفهوم أساسي — القيم العظمى والقيم الصغرى

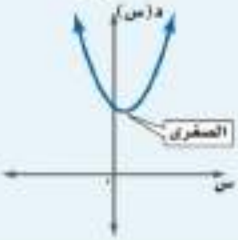
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يكون التمثيل البياني للدالة: د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ، حيث أ ≠ ٠:

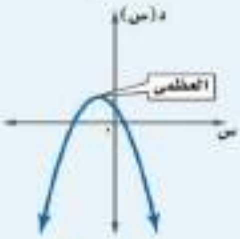
- مفتوحًا إلى الأعلى وله قيمة صغرى عندما أ > ٠
- مفتوحًا إلى الأسفل وله قيمة عظمى عندما أ < ٠
- مدى الدالة التربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على أو تساوي القيمة الصغرى إذا كانت أ > ٠، أو جميع الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى إذا كانت أ < ٠.

مثال:

أ موجبة



أ سالبة



مثال ٤ القيم العظمى والقيم الصغرى

لتكن د(س) = −٢ س^{٢} − ٤س + ٦.

أ) حدّد إذا كان للدالة قيمة عظمى أم قيمة صغرى.

في الدالة د(س) = −٢ س^{٢} − ٤س + ٦، أ = −٢، ب = −٤، جـ = ٦.

بما أن أ عدد سالب فالتمثيل البياني يكون مفتوحًا إلى الأسفل، ويكون للدالة قيمة عظمى.

ب) أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الصادي للرأس.

الإحداثي السيني للرأس يساوي $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٤}{٢(-٢)} = -١$.

د(س) = −٢س^{٢} − ٤س + ٦	الدالة الأصلية
د(−١) = −٢(−١)^{٢} − ٤(−١) + ٦	س = −١
د(−١) = ٨	بسّط

إذن، القيمة العظمى تساوي ٨.

تنبيه !

القيم الصغرى والقيم العظمى

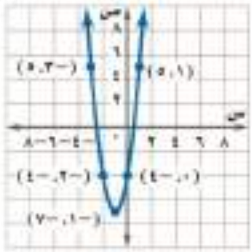
لا تنسَ إيجاد كلا الإحداثيين السيني والصادي للرأس (س،ص) حيث أن القيمة الصغرى أو القيمة العظمى تمثل الإحداثي الصادي له.

خاص بالمستوى 2

مثال ١ التمثيل البياني للقطع المكافئ

استعمل جدول القيم لتمثيل الدالة ص = ٣س^{٢} + ٦س − ٤ بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها.

س	ص
١	٥
٠	−٤
−١	−٧
−٢	−٤
−٣	٥



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا، ثُم وصل بينها بمنحنى أملس. ويمتد التمثيل البياني للقطع المكافئ إلى ما لا نهاية من كلا طرفيه، ومجاله هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداه هو { ص | ص ≥ −٧ }؛ لأن −٧ هي القيمة الصغرى.

عند تحديد خصائص القطع المكافيء من قاعدة الدالة فغالبًا من الأسهل إيجاد معادلة محور التماثل أولاً.

مثال ٣ تحديد خصائص القطع المكافئ من قاعدة دالته

أوجد الرأس، ومعادلة محور التماثل، والمقطع الصادي للدالة: ص = ٢ س^{٢} + ٤س − ٣

س = − $\frac{ب}{٢أ}$ صيغة معادلة محور التماثل

س = − $\frac{٤}{٢ \times ٢}$ س = −١ أ = ٢، ب = ٤، بسّط

معادلة محور التماثل هي س = −١ .

ولإيجاد إحداثي الرأس، خذ القيمة الناتجة من معادلة محور التماثل، واعتبرها إحداثيًا سينيًا لرأس القطع المكافيء ثم عوّضها في معادلة القطع المكافيء لإيجاد الإحداثي الصادي.

ص = ٢س^{٢} + ٤س −٣ المعادلة الأصلية

= ٢(−١)^{٢} + ٤(−١) − ٣ = −٥ س = −١، بسّط

الرأس هو (−١، −٥)، وبما أن المقطع الصادي هو عند النقطة (٠، جـ) دائمًا،لذا فالمقطع الصادي هو −٣.

خطوات التمثيل البيانى :

مفهوم أساسي تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

الخطوة ١، أوجد معادلة محور التماثل.

الخطوة ٢، أوجد الرأس وحدّد إذا كان يمثّل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة ٣، أوجد المقطع الصادي.

الخطوة ٤، استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى على التمثيل البياني للدالة عند الضرورة

الخطوة ٥، صل بين النقاط بمنحنى أملس.

خاص بالمستوى 2

◄ **مثل الدالة بيانيا:** $f(x)=x^2+4x+3$

نوجد محور التماثل $\frac{-4}{2\times1}=-2$

نوجد الرأس وذلك باخذ قيمة محور التماثل ونعوضها بقيمة x في المعادلة

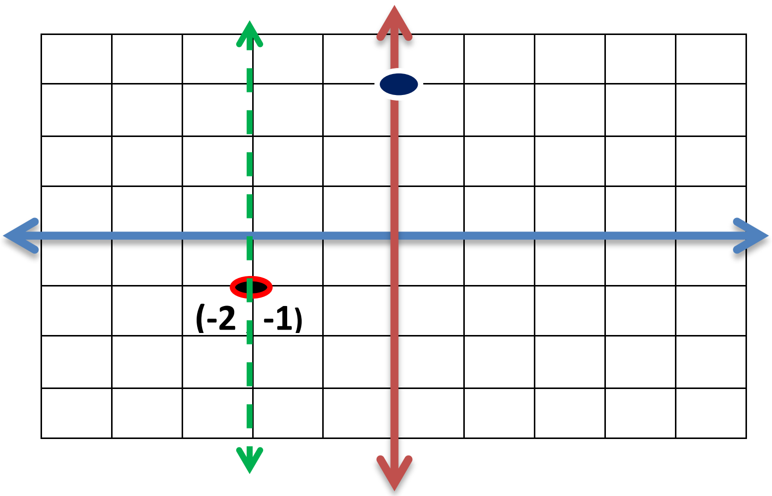
$Y=(-2)^2+4(-2)+3=-1$

يقع الرأس عند **(-2 , -1)** *وهو قيمة صغرى لأن* $x>0$

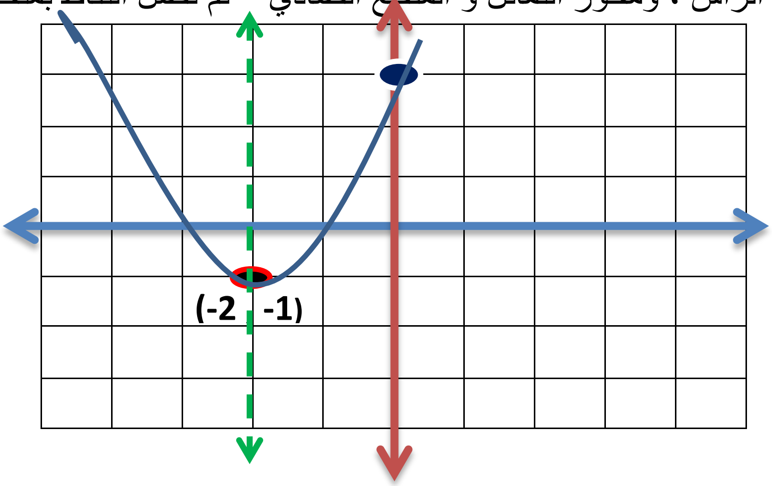
نوجد المقطع الصادي وذلك بوضع قيمة x=0 في الدالة الاصلية

$Y=(0)^2+4(0)+3=3$

يقسم محور التماثل القطع المكافئ الى جزأين متطابقين لذا فإنه لكل نقطة على احد الجزأين توجد نقطة تناظرها في الجزء الاخر



نحدد الرأس ، ومحور التماثل و المقطع الصادي ’ ثم نصل النقاط بمنحنى



تلخيص طرق حل المعادلات التربيعية

ملخص المفهوم — حل المعادلات التربيعية — أضف إلى مطويتك

الطريقة	متى يفضل استعمالها؟
التحليل للعوامل	تستعمل إذا كان الحد الثابت صفرًا، أو إذا كان من السهل تحديد العوامل فليست جميع المعادلات قابلة للتحليل.
التمثيل البياني	تستعمل عندما يكون الحل التقريبي مقبولًا.
استعمال الجذور التربيعية	تستعمل إذا كانت المعادلة مكتوبة على الصورة س^2 = ن، أي تستعمل إذا كانت المعادلة لا تحتوي على الحد س فقط.
إكمال المربع	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة أ س^2 + ب س + جـ = ٠، إلا أنه من الأسهل استعمالها إذا كان ب عددًا زوجيًا، أ = ١
القانون العام	يمكن استعمالها لأية معادلة على الصورة أ س^2 + ب س + جـ = ٠

حل المعادلات الأسيـة :

إذا كان $b^x = b^y$ فإن $x = y$

◄ **مثال حل المعادلة التالية** $2^x = 8^3$

نبسط لجعل الاساس متساوي لكي نستطيع مساواة الاسس وايجاد قيمة x

$2^x = (2^3)^3$ لان $2^3 = 8$

$2^x = (2)^{3\times 3}$ قانون قوة القوة

$2^x = (2)^9$ الاساس متساوي اذا الاسس متساوية

$X=9$ حل المعادلة

◄ **مثال حل المعادلة التالية** $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$$

$$(3)^{2(2x-1)} = 3^{6x}$$

2 (2x-1)=6x

4x -2 = 6x

X= -1 *حل المعادلة*

خاص بالمستوى 2

اللوغــاريتمات :

مفهوم أساسي **اللوغاريتم للأساس b**

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرَف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$b^y = x \text{ إذا وفقط إذا } \log_b x = y$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

◀ اكتب المعادلة اللوغاريتمية الى الصورة الاسية :

$\log_2 8 = 3 \quad \rightarrow 8 = 2^3$

◀ اكتب المعادلة الاسية على الصورة اللوغاريتمية :

$15^3 = 3375 \quad \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

◀ اوجد حل المعـادلة :

$$\log_{16} 4 = y$$

$4 = 16^y$ *تعريف اللوغارتم*

$4^1 = 4^{2y}$ $\quad 4^2 = 16$

1=2y *تعريف الدوال الاسية*

$Y=\frac{1}{2}$ *المجاهيل على طرف*

خاص بالمستوى 2

خصائص اللوغاريتمات :

مفهوم أساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

اوجد قيمة ما يلي :

1) $\log_5 125$

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

2) $12^{\log_{12} 4.7}$

$$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$$

من خصائص اللوغاريتمات :

مفهوم أساسي خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مفهوم أساسي خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

◄حل المعادلة : $\log_6 x + \log_6 x - 9 = 2$

$\log_6 x(x-9) = 2$ من خاصية الضرب

$x(x-9) = 6^2$ *من تعريف اللوغارتم*

$x^2 - 9x = 36$

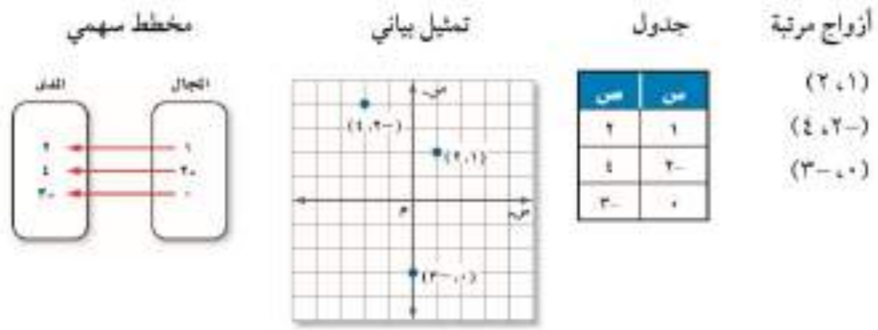
$x^2 - 9x - 36 = 0$

(x-12) (x+3) = 0

X=-3 *او* x=12 *الحل*

العلاقــات والدوال :

العلاقــة : هي ارتباط بين عناصر يعبر عنها اما بخطوط في مستوى احداثي او ازواج مرتبة او جداول او مخططات سهمية ، حيث يطلق على الاعداد الاولى في الازواج المرتبة بالمجال والثانية بالمدى .



بما أن قيم س في العلاقة هي عناصر المجال، وقيم ص هي عناصر المدى، فإن المجال في العلاقة أعلاه هو: {-٢، ٠، ١}، والمدى هو: {-٣، ٢، ٤}.

الـــدوال :

العلاقة التي تعيّن لكلّ قيمة من المُدخلات قيمةً واحدةً فقط من المُخرجات تُسمّى **دالّة**. وتُسمّى الصّيغة التي تستعملها لتعويض قيمة من المُدخلات للحصول على قيمة من المُخرجات باستعمال عملية أو أكثر **قاعدة الدالّة**.

ويمكنك تنظيم المُدخلات والمُخرجات وقاعدة الدالّة في جدول يسمى **جدول الدالّة**. تُسمّى مجموعة قيم المُدخلات **المجال**، وتُسمّى مجموعة قيم المُخرجات **المدى**.

مثـــال — إنشاء جدول دالة

١ **نقود :** يوفّر جعفر من مصروفه الشهري ٢٠ ريالًا. أنشئ جدول دالّة يبيّن مجموع ما يوفّره جعفر بعد شهر، وشهرين و ٣ و ٤ أشهر، ثمّ عيّن مجال الدالّة ومداها.

المُدخلات	قاعدة الدالّة	المُخرجات
رقم الشهر	اضرب في ٢٠	التوفير الكلي
١	٢٠ × ١	٢٠
٢	٢٠ × ٢	٤٠
٣	٢٠ × ٣	٦٠
٤	٢٠ × ٤	٨٠

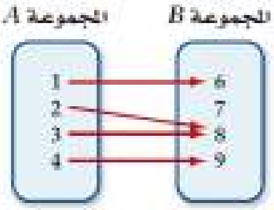
المجال : {١، ٢، ٣، ٤}

المدى : {٢٠، ٤٠، ٦٠، ٨٠}

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثلة في المخطط المجاور تمثل دالة.
حيث تمثل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.



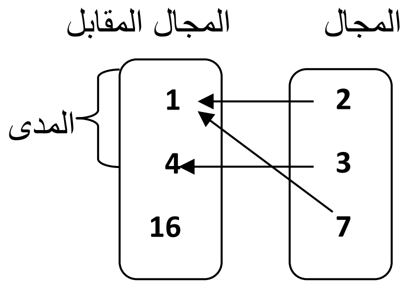
في الدالة يجب ان (يخرج سهم واحد فقط من كل عنصر من المجال)

هل تمثل العلاقة التالية دالة ؟

المجال	1	3	5	1
المدى	4	2	4	-4

ارتبط العنصر *1* في المجال بعنصرين في المدى ، (يوجد اكثر من قيمة ممكنة ل *y* عندما *x=1*) ، اذا" هذه العلاقة ليست دالة

هل تمثل العلاقة التالية دالة ؟



نعم تمثل دالة لان كل عنصر في المجال
ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى
(سواء كان العنصر في المدى نفسه او مختلف)

المجال المقابل : هو جميع عناصر المجموعة الثانية $\{1, 4, 16\}$،
المدى : هو العناصر التي تصل إليه الأسهم في المجموعة الثانية $\{1, 4\}$

هل تمثل العلاقة التالية دالة ؟

$$A = \{(7,2), (2,3), (7,3), (1,3)\}$$

عناصر المجال هي قيم X في الازواج المرتبة : $\{7, 2, 1\}$

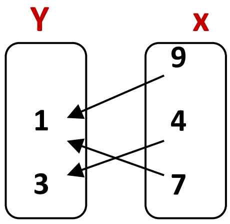
نلاحظ ان العدد *7* ارتبط بعددين مختلفين *2,3* إذا" لا تمثل دالة

أنواع الدوال : (شاملة ، متباينة ، متقابلة)

- **الدالـة الشـاملة :**

إذا كان المدى مساوي للمجال المقابل

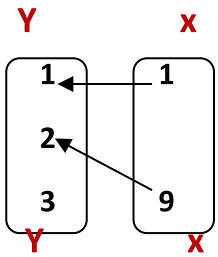
يصل فيها الى كل عنصر من المجال المقابل سهم واحد أو اكثر)



- **الدالة المتباينة :**

دالة يرتبط فيها كل عنصر من المجال بعنصر مختلف من المدى

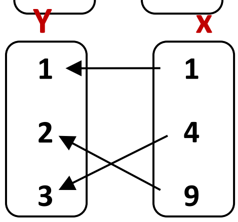
(يصل الى كل عنصر في المجال المقابل سهم واحد او اقل)



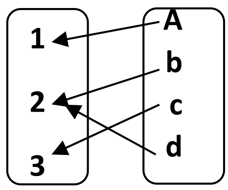
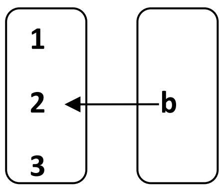
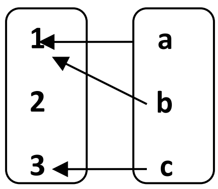
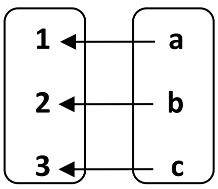
- **الدالة المتقابلة (تناظر احادي) :**

تكون متقابلة إذا كانت شاملة ومتباينة في نفس الوقت

(يصل الى كل عنصر في المجال المقابل سهم واحد فقط)



صنف العلاقات التالية :

A	B	C	D
			

A- **دالة شاملة** (وصل الى كل عنصر في المجال المقابل سهم او اكثر)

B- **دالة متباينة** (وصل الى كل عنصر في المجال المقابل سهم او اقل)

C- **ليست شاملة او متباينة** (وصل الى احد العناصر سهمين واحد العناصر لم يصله سهم

D- **دالة متقابلة لأنها شاملة ومتباينة** (وصل الى كل عنصر سهم)

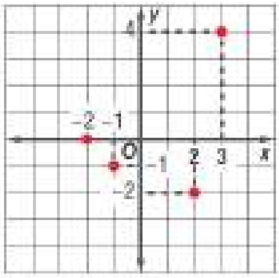
حدِّد مجال كلّ علاقة فيما يأتي ومداها، وبيِّن ما إذا كانت دالةً أم لا، وإذا كانت كذلك فهل هي متباينة أم لا

a) $\{(-6, -1), (-5, -9), (-3, -7), (-1, 7), (-6, -9)\}$

المجال = $\{-6, -5, -3, -1\}$ المدى = $\{-9, -7, -1, 7\}$

هل هي دالة: لا، لأن العنصر -6 في المجال ارتبط بكل من العنصرين -9، -1 في المدى.

b)



المجال = $\{-2, -1, 2, 3\}$

المدى = $\{-2, -1, 0, 4\}$

هذه العلاقة دالة؛ لأن كل عنصر في المجال ارتبط بعنصر واحد فقط من المدى. وهي متباينة؛ لأن كل عنصر من المدى ارتبط بعنصر واحد فقط من المجال.

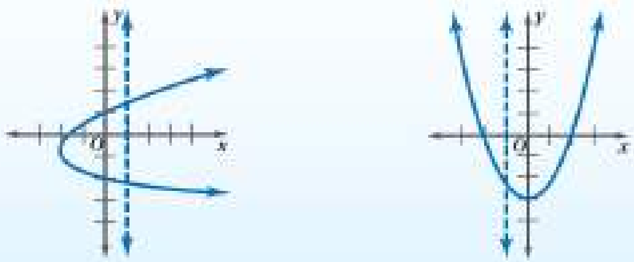
مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.

إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في أكثر من نقطة فالعلاقة ليست دالة.

النموذج:



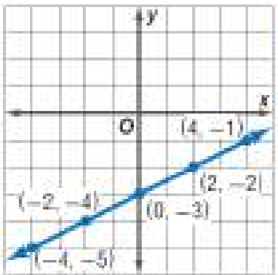
مثِّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًا، ثم حدِّد مجالها ومداها، وحدِّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدِّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوِّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثِّل المعادلة بيانيًا.

نفرض قيم اختيارية ل x ونعوض بها في المعادلة لإيجاد قيم y

مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم.

x	y
−4	−5
−2	−4
0	−3
2	−2
4	−1



التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y.

وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x، لذا فالدالة متباينة.

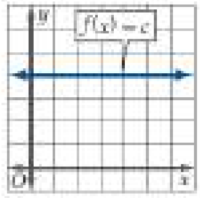
الخط الرأسي y بقطع المعادلة في نقطة واحدة

الدوال الرئيسية (الأم) :

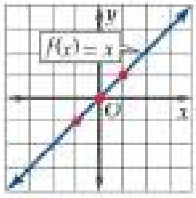
(الدالة الثابتة ، الدالة المحايدة ، الدالة التربيعية ، الدالة التكعيبية ، دالة الجذر التربيعي ، دالة المقلوب ، الدالة الدرجية ، دالة القيمة المطلقة)

مفهوم أساسي — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

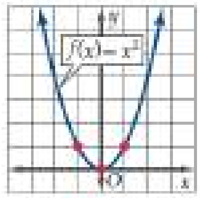
تكتب الدالة الثابتة على الصورة $f(x)=c$ حيث c عدد حقيقي، وتمثل بمستقيم أفقي.



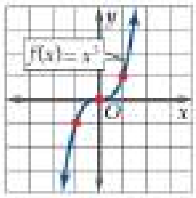
تمر الدالة المحايدة $f(x)=x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى الدالة التربيعية $f(x)=x^2$ شكل الحرف U.



الدالة التكعيبية $f(x)=x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



حيث ان مجال الدوال الخطية وكثيرات الحدود هو: جميع الاعداد الحقيقية *R*

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x)=\sqrt{x}$

المجال: $\{x \mid x \geq 0\}$

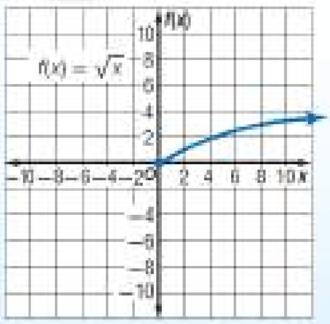
المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

المقطعان: $x=0, f(x)=0$

غير معرّفة عندما: $x<0$

سلوك الدالة عند طرفيها: $x \to 0, f(x) \to 0$

$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$



مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب

أضف إلى مطويتك

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x)=\frac{1}{x}$

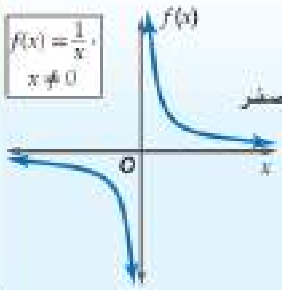
شكل التمثيل البياني: قطع زائد

المجال والمدى: جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر

خطا التقارب: $x=0$ و $y=0$

المقطعان: لا يوجد

تكون الدالة غير معرفة عندما: $x=0$



الدالة الدرجية: من الدوال المتعددة التعريف الخطية الشهيرة **الدالة الدرجية** التي تتكون من قطع مستقيمة أفقية، وقد سُميت بهذا الاسم لأن تمثيلها البياني يشبه الدرج، كما أن **دالة أكبر عدد صحيح** التي تكتب على الصورة $f(x) = [x]$، هي مثال على الدالة الدرجية؛ حيث يعني الرمز $[x]$ أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x. فعلى سبيل المثال: $[3.25] = 3$ وكذلك $[-4.6] = -5$.

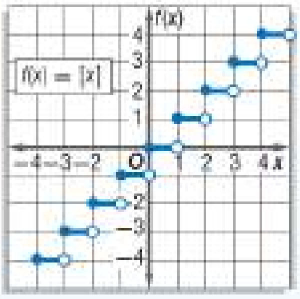
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة أكبر عدد صحيح

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = [x]$، وتعرَّف على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \\ -1 & -1 \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: قطع مستقيمة أفقية.

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الصحيحة

المقطعان: $f(x) = 0$ حيث $0 \le x < 1$, $x = 0$

وهناك نوع آخر من الدوال المتعددة التعريف يسمى **دالة القيمة المطلقة** وهي الدالة التي تحتوي على عبارة جبرية يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة.

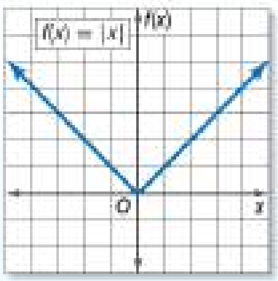
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

دالة القيمة المطلقة

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = |x|$، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$



شكل التمثيل البياني: على شكل حرف V

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

ولايمكن أن تكون: $f(x) < 0$

مفهوم أساسي

الدوال الزوجية والدوال الفردية

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

إيجاد قيم الدالـــة :

اوجد قيمة الدالة $f(x) = -4x + 7$ عندما :

$1)f(2)$ $\quad$ $2)f(-3)+1$

$f(2) = -4(2) + 7$

$= -8 + 7$

$= -1$

$f(-3) + 1 = [-4(-3) + 7] + 1$

$= [12 + 7] + 1$

$= 19 + 1 = 20$

اوجد قيمة الدالة $f(x) = 2x^2 - 8$ عندما :

1) f(6) $\quad$ **2) f(2y)**

$f(6) = 2(6)^2 - 8$

=2(36) -8

=64

$f(2y) = 2(2y)^2 - 8$

$=2(4y^2) - 8$

$=8y^2 - 8$

مثال 6 من واقع الحياة **إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف**

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 , & 66 \le x \le 68 \\ 2x - 66 , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ تعريف الدالة في الفترة $66 \le x \le 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ بسّط

بناء على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لإيجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ بسّط

بناء على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

هل الدوال التالية زوجية ام فردية ؟

- $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x}$

$\boldsymbol{-f(x)} = -(x^3 - 2x) = -x^3 + 2x = -2(-x) - (-x)^3 = \boldsymbol{f(-x)}$ فردية

- $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2}$

$\boldsymbol{f(x)} = x^4 + 2 = (-x^4) + 2 = \boldsymbol{f(-x)}$ زوجية

- $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x}$

$$\boldsymbol{f(-x) = (-x^3) - 0.5(-x^2) - 3(-x)}$$
$$\boldsymbol{= -x^3 - 0.5x^2 + 3x \;\neq\; f(x) \;\neq -f(x)}$$

ليست فردية او زوجية

المجـــال و الـمــدى :

نلاحظ الدالة التالية : $f(x) = x + c$ ، و من الممكن ان تكتب بالشكل ($y = x + c$)

المجال : جميع قيم x الممكنة التي ستجعل الدالة $f(x)$ معرفة ... (المدخلات)

المـدى : جميع قيم $f(x)$ او y الممكنة التي ستنتج بعد التعويض بقيم x ، (المخرجات)

المدى صورة المجال

متى تكون الدالة غير معرفة ؟؟؟

☼المقام يساوي صفر

☼داخل الجذر يساوي عدد سالب

أي دالة معرفة عند جميع الاعداد سيكون مجالها الاعداد الحقيقية R ،،،
ويمكن التعبير عن المجال R بهذا الشكل : $\{x | x \in R\}$ او $(-\infty, \infty)$
اما اذا وجدت بها اعداد تجعلها غير معرفه فإن مجالها R باستثناء تلك الاعداد

☼طريقة التعبير عن المجال والمدى : (وصف مجموعة جزئية)

الطريقة الاولى:

الطريقة الثانية:

تُستعملُ رموزُ الفترات لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "]" أو "[" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان ")" أو "(" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

(a,b)	تعني ان الحل جميع الاعداد التي تقع بين a و b باستثنائهما . (استثناء الطرفين)
$[a,b]$	تعني ان الحل جميع الاعداد التي تقع بين a و b بالإضافة لهما .
$[a,\infty)$	تعني ان الحل : العدد a وجميع الاعداد الاكبر منه
$(-\infty,a]$	تعني ان الحل : العدد a وجميع الاعداد الأصغر منه
(a,∞)	تعني ان الحل : جميع الاعداد الاكبر من a . (استثنينا a)
$(-\infty,a)$	تعني ان الحل : جميع الاعداد الاصغر من a . (استثنينا a)
$\{a,b\}$	تعني ان الحل العددين a ,b فقط

امثله على استعمال رموز الفترات : اكتب كلا من المجموعات التالية باستعمال رموز الفترة :

- $-8 < x \leq 16$: $(-8,16]$
- $x < 11$: $(-\infty,11)$
- $x > 5$ او $x \leq -16$: $(-\infty,-16] \cup (5,\infty)$

....

الدالـــة	المجـــال
كثيرة الحدود	مجموعة الاعداد الحقيقية $R = (\infty,-\infty)$
الدالة الكسرية	$f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$ المجال : مجموعة الاعداد الحقيقية مطروحاً منها اصفار المقام (جميع الاعداد التي لا تجعل المقام صفر) $D = \{x \in R \ \vert g(x) \neq 0\}$
الدالة الجذرية	• $\sqrt[n]{g(x)}$ اذ كان دليل الجذر (n) زوجي : المجال : جميع الأعداد التي تحقق $0 \leq g(x)$ (لان الجذر السالب غير معرف) $D = \{x \in R \ \vert g(x) \geq 0\}$ ❖ اما اذا كان الجذر في المقام (داله جبريه) فإن : المجال: جميع الاعداد التي تحقق: $0 < g(x)$ $D = \{x \in R \ \vert g(x) > 0\}$ • $\sqrt[n]{g(x)}$ اذ كان دليل الجذر (n) فردي : *المجال:* مجموعة الاعداد الحقيقية $R = (\infty,-\infty)$
الدالة الجبرية : (الدوال التي تتشكل باستخدام العمليات الجبرية $(\pm \times \div)$ بين الدوال)	هو المجوعة الناتجة من تقاطع المجموعات المكونة لها

غالباً يكون التركيز في الاختبارات على المجال ، اكثر من المدى

المدى : لا يوجد قاعده محدده ، يختلف من دالة لأخرى ، حيث انه جميع القيم الممكنة التي ستنتج لنا ، فإذا وجدنا اصغر قيمة ممكنة للناتج ، فإن المدى هو اكبر او يساوي هذه القيمة ، واذا وجدنا اكبر قيمة ممكنة فإن المدى هو اصغر او يساوي هذه القيمة وهكذا ...

R هو اختصار ل : $\{x|x \in R\}$ او $(-\infty, \infty)$ و هو جميع الاعداد الحقيقية

R^+ : الاعداد الحقيقية الموجبة ، R^- : الاعداد الحقيقية السالبة

....

امثله على المجال والمدى : (سنعرض عدة اشكال للحل جميعها صحيحة)

الدالة	المجال	المدى
$f(x) = 5$ ثابته	لا يوجد جذراو كسر	دالة ثابته لا يوجد سوى حل وحيد وهو نفس العدد
	R	$\{5\}$
$f(x) = x$ خطية	لا يوجد جذر او كسر	الناتج سيكون أي عدد لايوجد استثناء
	R	R
$f(x) = 6x + 9$	لا يوجد جذر او كسر	الناتج سيكون أي عدد لايوجد استثناء
	R	R
$f(x) = x^2$ تربيعية	لا يوجد جذر او كسر	عند تربيع الاعداد $(\pm)$ الناتج: صفر او عدد موجب لذلك المدى نستبعد السالبة
	R	$\{y|y \geq 0 , y \in R\}$ او $R^+ + 0$ او $[0, \infty)$
$f(x) = x^2 + 2$ تربيعية	لا يوجد جذر او كسر	اصغر قيمة ممكنة ل x هي الصفر ، اصغر قيمة ممكنة للناتج هي 2 : $f(x) = 0 + 2 = 2$
	R	$\{y|y \geq 2 , y \in R\}$ او $[2, \infty)$
$f(x) = x^2 - 3$ تربيعية	لا يوجد جذراو كسر	اصغر قيمة ممكنة ل x هي الصفر ، اصغر قيمة ممكنة للناتج هي 3 - : $f(x) = 0 - 3 = -3$
	R	$\{y|y \geq -3 \ , y \in R\}$ او $[-3, \infty)$
$f(x) = x^3$ تكعيبية	لا يوجد جذراو كسر	عند تكعيب الاعداد $(\pm)$ الناتج : من الممكن موجبه و سالبة وصفر إذا" الناتج سيكون أي عدد لا استثناء
	R	R
$f(x) = 2x^3 + 1$ تكعيبية	لا يوجد جذر او كسر	الناتج سيكون أي عدد لا استثناء
	R	R
❖**مجــال** الدوال الثابتة و دوال كثيرات الحدود R دائما"		❖**مـدى** دوال كثيرات الحدود R , باستثناء الدالة الثابتة و الزوجية يختلف على حسب الدالة

الدالـــة	المجـــال	الـــمـدى
$f(x) = \sqrt{x}$ جذرية	يوجد جذر، يجب ان يكون (غير سالب) $\{x \mid x \geq 0\ , x \in R\}$ او $[0, \infty)$	يستحيل ان الناتج سالب ، لان اصغر عدد يمكن التعويض به صفر، واصغر ناتج هو صفر: $\sqrt{0} = 0$ $\{y \mid y \geq 0\ , y \in R\}$ او $[0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x} + 9$ جذرية	يوجد جذر، يجب ان يكون (غير سالب) $[0, \infty)$ او $\{x \mid x \geq 0\ , x \in R\}$	اصغر عدد يمكن التعويض به صفر، $\sqrt{0} + 9 = 9$ إذا" اصغر ناتج ممكن 9 $\{y \mid y \geq 9\ , y \in R\}$ او $[9, \infty)$
$(x) = \sqrt{x - 2}$	يوجد جذر، يجب ان يكون (غير سالب) $X - 2 \geq 0 \quad , \quad X \geq 2$ $[2, \infty)$ او $\{x \mid x \geq 2\ , x \in R\}$	اصغر قيمة يمكن التعويض بها هي 2 ،، وعندها يكون الناتج $\sqrt{2 - 2} = 0$ ، إذا" المدى هو صفر والاكبر منه $[0, \infty)$ او $\{x \mid x \geq 0\ , x \in R\}$
$f(x) = \sqrt{x^3} - 5$ جذرية	يوجد جذر، يجب ان يكون (غير سالب) $[0, \infty)$ او $\{x \mid x \geq 0\ , x \in R\}$	اصغر عدد يمكن التعويض به 0 ، $\sqrt{0} - 5 = -5$ إذا" اصغر ناتج ممكن -5 $[-5, \infty)$ او $\{y \mid y \geq -5\ , y \in R\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ كسرية	يوجد كسر، يجب ان يكون المقام ≠ صفر $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او $\{x \mid x \neq 0\ , x \in R\}$	من الممكن ان يكون الناتج أي عدد باستثناء الصفر ، (لا يوجد عدد نقسم الواحد عليه ويكون الناتج صفر) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او $\{y \mid y \neq 0\ , y \in R\}$
$f(x) = \frac{1}{x} - 2$ كسرية	يوجد كسر، يجب ان يكون المقام ≠ صفر $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او $\{x \mid x \neq 0\ , x \in R\}$	من الممكن ان يكون الناتج أي عدد و الصفر ايضا $f(x) = \frac{1}{0.5} - 2 = 0$ ، باستثناء (-2) لان الكسر يستحيل ان يكون صفر : $f(x) = 0 - 2 = -2$ $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ او $\{y \mid y \neq -2\ , y \in R\}$
$f(x) = \frac{3}{x^2} + 12$ كسرية	يوجد كسر، يجب ان يكون المقام ≠ صفر $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او $\{x \mid x \neq 0\ , x \in R\}$	الكسر يستحيل ان يكون سالب (بسبب التربيع) و يستحيل الصفر.. لذلك الناتج سيكون عدد موجب مضاف عليه 12 ، (الحل : هو أي عدد اكبر من12) $(12, \infty)$ او $\{y \mid y > 12\ , y \in R\}$
$f(x) = \frac{2}{x^3} - 99$ كسرية	يوجد كسر، يجب ان يكون المقام ≠ صفر $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او $\{x \mid x \neq 0\ , x \in R\}$	الكسر من الممكن ان يكون سالب او موجب و يستحيل الصفر ،،،و بذلك الناتج سيكون أي عدد باستثناء (- 99) ،، لان الكسر يستحيل ان يكون صفر $f(x) = 0 - 99 = -99$ $(-\infty, -99) \cup (-99, \infty)$ $\{y \mid y \neq -99\ , y \in R\}$
$f(x) = \frac{25}{x^2 - 25}$ .. لو كان المقام $X^2 + 25$ فإن المجال سيكون R ، لأنه يستحيل ان يكون 0	يوجد كسر، يجب ان يكون المقام ≠ صفر نوجد اصفار المقام : $x^2 - 25 = 0$ $\rightarrow \sqrt{x^2} = \mp\sqrt{25} \rightarrow x = \mp 5$ جميع الاعداد باستثناء : ∓ 5 $(-\infty, -5) \cup (5, \infty) \cup (-5, 5)$ او $\{x \mid x \neq \mp 5\ , x \in R\}$ او $R - (\pm 5)$	من الممكن ان يكون الناتج أي عدد باستثناء الصفر ، (لا يوجد عدد نقسم 25 عليه ويكون الناتج صفر) ومن الرسم البياني يتضح لنا المدى $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

الدالة	المجال	المدى
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ جبرية : كسرية، جذرية	يوجد كسر(يجب ان لا يكون المقام 0) و جذر (يجب ان لا يكون سالب) ، المجال: هو تقاطع المجالين ($0<X$) $(0,\infty)$ او $\{x\|x>0, x\in R\}$	الكسر يستحيل ان يكون سالب (بسبب الجذر) و يستحيل الصفر بسبب الكسر ، الناتج سيكون أي عدد اكبر من الصفر R^+ او $(0,\infty)$ $\{y\|y>0\,, y\in R\}$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+6$ جبرية : كسرية، جذرية	يوجد كسر (يجب ان لا يكون المقام 0) و جذر (يجب ان لا يكون سالب) ، المجال هو تقاطع المجالين: $x+1>0$ $x>-1$ $(-1,\infty)$ او $\{x\|x>-1, x\in R\}$	الكسر سيكون عدد موجب (لان المجال محذوف منه الصفر والسالب) مضاف عليه 6 إذاً" المدى أي عدد اكبر من 6 $(6,\infty)$ او $\{y\|y>6\,, y\in R\}$
$f(x)=\dfrac{7}{\sqrt{x-1}}-3$ جبرية : كسرية، جذرية	يوجد كسر(يجب ان لا يكون المقام 0) و جذر (يجب ان لا يكون سالب) ، المجال: هو تقاطع المجالين $x-1>0 \rightarrow x>1$ $(1,\infty)$ او $\{x\|x>1\,, x\in R\}$	الكسر سيكون عدد موجب اكبر من الصفر ، (لو كان الكسر صفر فإن الناتج سيكون -3) لذلك يستحيل ان يكون الناتج -3 سيكون كل الاعداد الاكبر منه $(-3,\infty)$ او $\{y\|y>-3\,, y\in R\}$
$f(x)=\|x+1\|$ قيمة مطلقة	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج القيمة المطلقة موجبة دائما" و الصفر $R^+ + \{0\}$ او $[0,\infty)$ او $\{y\|y\ge 0\,, y\in R\}$
$f(x)=\|x+1\|+9$ قيم مطلقة	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج القيمة المطلقة موجبة دائما"والصفر، مضاف اليه 9 اصغر عدد ممكن 9 (عندما x=0)إذاً المدى 9والاكبر منها $[9,\infty)$ او $\{y\|y\ge 9\,, y\in R\}$
$f(x)=\|x^2+1\|$ قيمة مطلقة	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج القيمة المطلقة موجبة دائما" و الصفر، وبما ان x^2 فإن نواتجة دائما موجبه اصغر ناتج ممكن عند x=0 $\|0+1\|=1$ $[1,\infty)$ او $\{y\|y\ge 1\,, y\in R\}$
$f(x)=[x+1]$ درجية	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج الدالة الدرجية دائما" عدد صحيح ،،، المدى جميع الاعداد الصحيحة Z $\{y\|y\in Z\}$ او يكتب بهذه الطريقة (Z)
$f(x)=[x+1]+4$ درجية	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج الدالة الدرجية دائما" عدد صحيح ،،، المدى جميع الاعداد الصحيحة Z Z
$f(x)=[x^2]+4$ درجية	لا يوجد كسر او جذر R	ناتج الدالة الدرجية دائما" عدد صحيح،،، لكن يوجد تربيع إذاً، اصغر عدد ممكن ل x هو الصفر $[0]+4=4$ واصغر ناتج ممكن هو 4 $\{y\|y\ge 4\,, y\in Z\}$

وهناك طريقة اخرى لإيجاد المجال و المدى بالرسم البياني للدالة :

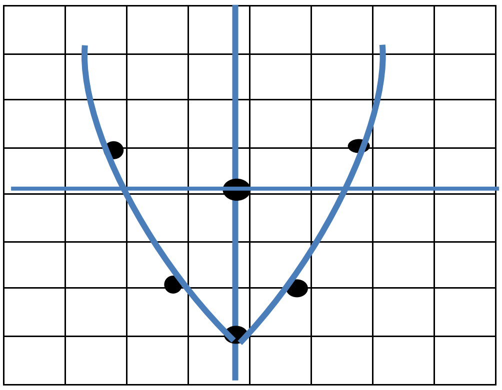
حيث محور x هو المجال ومحور y هو المدى

اوجد مجال ومدى الدالة : $y = x^2 - 3$ ؟؟؟ نفرض قيم ل x ونوجد صورتها

X	$x^2 - 3$	Y
-2	$-2^2 - 3$	1
-1	$-1^2 - 3$	-2
0	$0^2 - 3$	-3
1	$1^2 - 3$	-2
2	$2^2 - 3$	1

ثم نمثلها على خط الاعداد ونوصلها

X



نلاحظ ان محور X غير محدود من الممكن ان يكون أي عدد الى مالانهاية ،، إذا" المجال R و اصغر قيمة في محور Y هي -3 ،،، إذا" المدى -3 و جميع الاعداد الأكبر منها

$\{y | y \geq -3 , y \in R\}$

مثّل الدالة $f(x) = |2x| - 4$ بيانيًا، ثم حدّد كلًّا من مجالها ومداها.

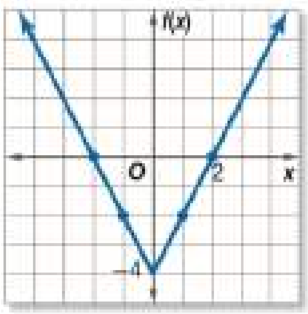
1) اجعل ما بداخل القيمة المطلقة يساوي الصفر، أي $2x = 0$ أو $x = 0$

2) كوّن جدولًا للقيم، يحوي قيمًا لـ x أكبر من 0 وقيمًا أصغر من 0

x	$\|2x\| - 4$
−2	0
−1	−2
0	−4
1	−2
2	0

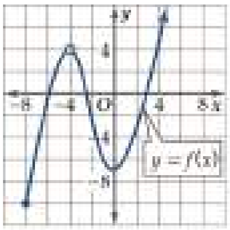
3) مثّل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي.

4) صل بين النقاط.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو $\{f(x) | f(x) \geq -4\}$.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى



أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.

المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid -8 \leq x, x \neq -4, x \in R\}$.

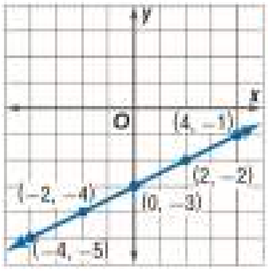
المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

مثّل المعادلة $y = \frac{1}{2}x - 3$ بيانيًا، ثم حدّد مجالها ومداها، وحدّد ما إذا كانت تمثل دالة أم لا، وإذا كانت كذلك، فهل هي متباينة أم لا؟ ثم حدّد ما إذا كانت منفصلة أم متصلة.

كوّن جدولًا لبعض القيم التي تحقق المعادلة، ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

x	y
-4	-5
-2	-4
0	-3
2	-2
4	-1



مجال هذه العلاقة ومداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن أي عدد حقيقي يمكن أن يكون الإحداثي x لنقطة ما على المستقيم، كما أن أي عدد حقيقي أيضًا يمكن أن يكون الإحداثي y لنقطة ما على المستقيم.

التمثيل البياني للعلاقة يحقق اختبار الخط الرأسي؛ لذا فإن المعادلة تمثل دالة؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y،
وحيث إن كل قيمة لـ y مرتبطة بقيمة واحدة فقط لـ x، لذا فالدالة متباينة.

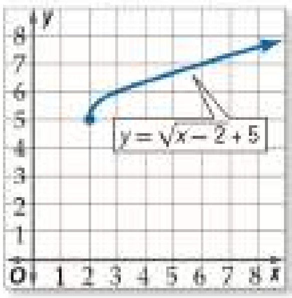
وبما أن التمثيل البياني عبارة عن مستقيم متصل دون انقطاع، فالدالة متصلة.

مثّل كلّ دالة مما يأتي بيانيًا، وحدّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x - 2} + 5$

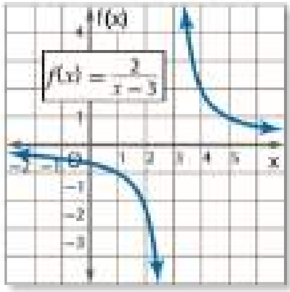
القيمة الصغرى للدالة عند $(2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًا. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.
المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4



حدد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلّ من الدالتين الآتيتين:

(a



حدد قيمة x التي تكون الدالة $f(x)$ عندها غير معرّفة.

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرّفة عند $x = 3$ ، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$.

كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلّت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.

مجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

ايجاد مجال متباينة ؟

يكون بإيجاد جميع القيم التي يمكن التعويض بها ل X بحيث تكون المتباينة صحيحة ومعرفة (ايجاد مجموعة الحل)

مثال: اوجد مجال المتباينة: $2 \leq X + 11$

نبحث عن الاعداد التي ستحقق المتباينة (جميع الاعداد التي سنجمعها مع *11* ويكون الناتج اكبر او يساوي *2*)

$$2 \leq X + 11 \quad \rightarrow \quad 2 - 11 \leq X \quad \rightarrow \quad -9 \leq X$$

المجال: $[-9, \infty)$ او $\{x | x \geq -9 \, , x \in R\}$

يمكن التحقق بالتعويض بأي عدد اصغر من *9-* سنلاحظ انه لا يحقق المتباينة

$2 \leq -10 + 11 \quad \rightarrow \quad 2 \leq 1$ خاطيء

مثال : اوجد مجال المتباينة: $2 > \frac{6}{|X-1|}$

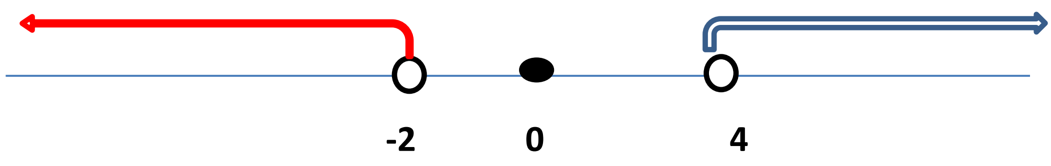
نبحث صحة المتباينة : (نوجد مجموعة الحل)

$$2 > \frac{6}{|X-1|} \rightarrow 2|X-1| > 6 \rightarrow |X-1| > \frac{6}{2} \rightarrow |X-1| > 3$$

☼ $X - 1 > 3 \rightarrow X > 4$

☼ $-(X-1) > 3 \rightarrow X - 1 < -3 \rightarrow X < -2$

مجموعة الحل $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$



مثال : اوجد مجال المتباينة: $0 < \sqrt{X+9} \leq 10$

نبحث مجموعة حل المتباينتان : نربع للتخلص من الجذر

$$\sqrt{X+9} \leq 10 \rightarrow \sqrt{X+9}^2 \leq 10^2 \rightarrow X \leq 100 - 9 \rightarrow X \leq 91$$

مجموعة حل الطرف الايمن : $(-\infty, 91]$

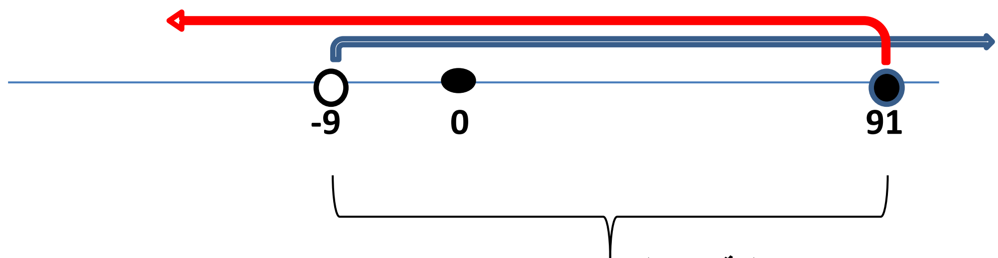
$$0 < \sqrt{X+9} \rightarrow 0 < X + 9 \rightarrow -9 < X$$

الطرف الايسر : $(-9, \infty)$

المجال للمتباينة ككل هو تقاطع المجالين السابقة :

$$(-\infty, 91] \cap (-9, \infty) = (-9, 91]$$

التأكد بالرسم :



منطقة التقاطع $(-9, 91]$

العمليات على الدوال :

مفهوم أساسي العمليات على الدوال أضف إلى مطويتك

العملية	التعريف	مثال لتكن $f(x) = 2x,\ g(x) = -x + 5$
الجمع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$2x + (-x + 5) = x + 5$
الطرح	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$2x - (-x + 5) = 3x - 5$
الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	$2x(-x + 5) = -2x^2 + 10x$
القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$	$\frac{2x}{-x+5},\ x \neq 5$

◄ اذا كان $g(x) = 3x - 4$ ، $f(x) = x^2 + 7x + 12$ فاوجد مايلي :

$$1 - (f + g)(x)$$

$$f(x) + g(x) = x^2 + 7x + 12 + (3x - 4)$$

$$= x^2 + 10x + 8$$

$$2 - (f - g)(x)$$

$$= x^2 + 7x + 12 - (3x - 4) = x^2 + 7x + 12 - 3x + 4$$

$$= x^2 + 4x + 16$$

$$3 - (f \,.\, g)(x)$$

$$= (x^2 + 7x + 12)(3x - 4)$$

$$= 3x^3 + 21x^2 + 36x - 4x^2 - 28x - 48$$

$$= 3x^3 + 17x^2 + 8x - 48$$

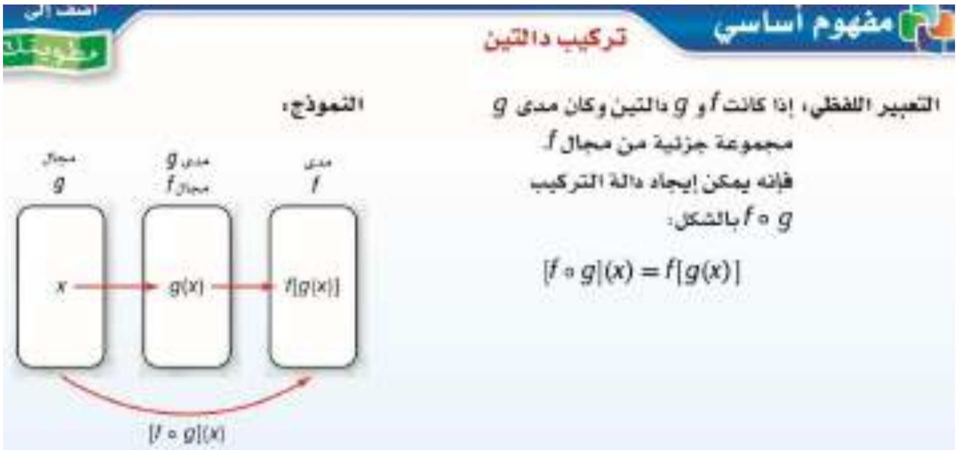
$$4 - \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

$$= \frac{(x^2+7x+12)}{(3x-4)} \quad , \quad x \neq \frac{4}{3}$$

بما ان $x = \frac{4}{3}$ تجعل المقام صفر فإنها تستثنى من مجال الدالة .

خاص بالمستوى 2

تركيب دالتين (التحصيــل) : دمج دالتين


مفهوم أساسي — تركيب دالتين

التعبير اللفظي: إذا كانت f و g دالتين وكان مدى g مجموعة جزئية من مجال f فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

النموذج:

يمكن ان يكون تركيب دالتين غير معرف ،فإذا كانت f,g دالتين فإن $[fog](x)$ يكون معرف فقط عند قيم x التي تجعل $g(x)$ عنصر في مجال الدالة f ،
وكذلك $[gof](x)$ تكون معرفة فقط عند قيم x التي تجعل $f(x)$ عنصر في مجال $g(x)$

◄ اوجد $[fog](x)$ و $[gof](x)$ ان امكن :

- $g(x) = 4x \quad , \quad f(x) = 2x - 5$

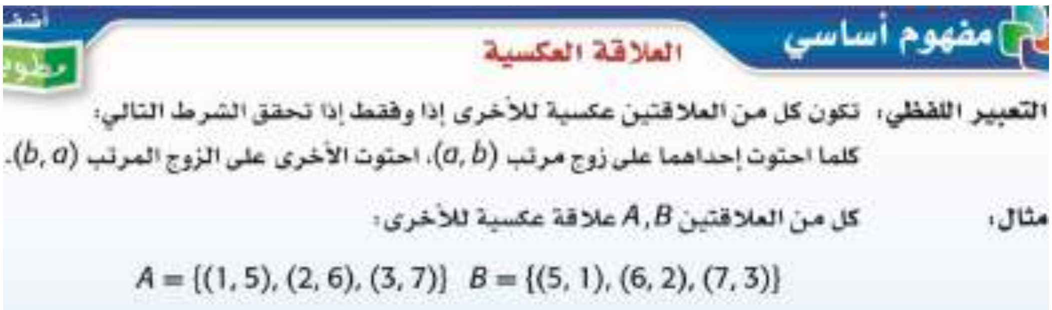
$$[fog](x) = f[g(x)] = f(4x) = 2(4x) - 5 = 8x - 5$$

$$[gof](x) = g[f(x)] = g(2x - 5) = 4(2x - 5) = 8x - 20$$

- $g(x) = x - 6 \quad , \quad f(x) = x^2 + 2$

$$[fog](x) = f[g(x)] = f(x - 6) = (x - 6)^2 + 2$$
$$= x^2 - 12x + 36 + 2 = x^2 - 12x + 38$$
$$[gof](x) = g[f(x)] = g(x^2 + 2) = x^2 + 2 - 6 = x^2 - 4$$

العلاقة العكسيــة :


مفهوم أساسي — العلاقة العكسية

التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$

مفهوم أساسي — **خواص الدالة العكسية**

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$.	أوجد $f^{-1}(2)$.
$f(x) = x - 4$	$f^{-1}(x) = x + 4$
$f(6) = 6 - 4 = 2$	$f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$

وبما أن كلًا من $f(x), f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

◄ اوجد معكوس الدالة التالية : $f(x) = 2x - 5$

نعيد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y : $f(x) = 2x - 5 \quad \rightarrow y = 2x - 5$

ثم بدل بين x, y في المعادلة ، $x = 2y - 5$ و نحل المعادلة بالنسبة ل y

$$X = 2y - 5 \quad \rightarrow \quad X + 5 = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{x+5}{2} = y$$

نضع $f^{-1}(x)$ بدلا من المتغير y ·· إذا" الدالة العكسيـة هي : $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

مفهوم أساسي — **الدالة العكسية**

التعبير اللفظي: تكون كلٌ من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

لرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

◄ في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى ام لا

$$f(x) = 3x + 9 \quad , \quad g(x) = \frac{1}{3}x - 3$$

نتأكد هل تحصيل الدالتين يساوي المحايدة

$$[fog](x) = f(\tfrac{1}{3}x - 3) = 3(\tfrac{1}{3}x - 3) + 9 = \tfrac{3}{3}x - 9 + 9 = x$$

$$[gof](x) = g(3x + 9) = \frac{1}{3}(3x + 9) - 3 = \frac{3}{3}x + \frac{9}{3} - 3 = x$$

إذا" تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى

☼طريقة أخرى من خواص الدالة العكسية : $f(a) = b \ , \ f^{-1}(b) = a$

نختار اسهل رقم $a = 1$: $f(1) = 3(1) + 9 = 12$

إذا" $b = 12$ $\quad g(12) = \frac{1}{3}12 - 3 = 4 - 3 = 1$

تحققت الخاصية إذا" دالتان عكسيتان

المصفوفات :

تنظيم البيانات، **المصفوفة** هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية، محصورة بين قوسين. وتُنظم الأعداد أو البيانات في المصفوفة بحيث يكون الموقع في المصفوفة ذا معنى. وتُسمى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا**. ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال حرف كبير تحته خط مثل $\underline{A}$ و $\underline{B}$.

$$\underline{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{\text{4 أعمدة}} \Big\} \text{ ثلاثة صفوف}$$

العنصر 1− موجود في الصف 2 ، والعمود 1 ، ويرمز إليه بالرمز a_{21}.

العنصر 8 − موجود في الصف 3، والعمود 2 ، ويرمز إليه بالرمز a_{32}.

يمكنك تحديد نوع المصفوفة **برتبتها**؛ فالمصفوفة المكونة من m صفًا و n عمودًا يقال عنها مصفوفة من الرتبة $m \times n$ أو من النوع $m \times n$ (تقرأ "m في n"). فالمصفوفة $\underline{A}$ في الأعلى هي مصفوفة من النوع 3×4 أو من الرتبة 3×4؛ لأنها تحتوي على 3 صفوف ، و 4 أعمدة. ويدل الرمز a_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{A}$ ، على حين يدل الرمز b_{12} على عنصر في المصفوفة $\underline{B}$.

◄ مثال : $\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ ، حدد رتبة المصفوفة ، واوجد a_{21}

عدد الصفوف *2* و الاعمدة *3* إذاً الرتبة *2×3*

a_{21} الرقم الاول الصفوف الثاني الاعمدة ، الصف الثاني والعمود الاول= (*3*)

بعض المصفوفات لها تسميات خاصة.

مصفوفة صف تحوي صفًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة عمود تحوي عمودًا واحدًا.

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المربعة عدد الصفوف فيها يساوي عدد الأعمدة.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية جميع عناصرها أصفار.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون **المصفوفتان متساويتين** إذا كانتا من الرتبة نفسها ، وتساوت عناصرهما المتناظرة.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان لهما رتبتان مختلفتان.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ليست جميع العناصر المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان.

تستعمل المصفوفات لتنظيم البيانات وتحليلها.

◄في مطعم وضعت لافته بها اسعار 3 انواع من البيتزا بثلاثة احجام .

	كبير	وسط	صغير
دجاج	45	35	20
لحم	50	40	24
خضار	35	25	10

- نظم هذه البيانات في مصفوفة على أن تكون تصاعدية
- اوجد رتبة المصفوفة
- اوجد قيمة a_{12}

الترتيب تصاعديا يعني ان (نبدأ بأقل شيء ثم نصعد ونرتفع لأعلى شيء)

صغير وسط كبير

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}35 & 25 & 10\\ 45 & 34 & 20\\ 50 & 40 & 24\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{خضار}\\ \text{دجاج}\\ \text{لحم}\end{array}\end{array}$$

المصفوفة 3 اعمدة و 3 صفوف : 3×3

a_{12} في الصف الاول والعمود الثاني = 25

،،

العمليات على المصفوفات:

يمكن جمع مصفوفتين او طرحها إذا كانت من نفس الرتبة فقط ، وتكون المصفوفة الناتجة من عملية الجمع او الطرح من نفس الرتبة ايضا .

◄ مثال: $A = \begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix}9\\ 5\end{bmatrix}$

اوجد $A+B$:

$$\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+2 & 2+1\\ -1+7 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$

اوجد $A+C$: لا يمكن ذلك لان رتبتي المصفوفتان مختلفة .

الضرب في عدد ثابت:

يكون بضرب الثابت في كل عناصر المجموعة وينتج لنا مصفوفة بنفس رتبة المصفوفة الأصلية .

◄مثال:اوجد حاصل ضرب العدد 5 في المصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$5 \times \underline{A} = 5 \times \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5 \times \underline{A} = \begin{bmatrix} 5 \times 4 & 5 \times 2 \\ 5 \times -1 & 5 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$5 \times \underline{A} = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

....

ضرب المصفوفات :

يمكنك ضرب مصفوفتين إذا وفقط اذا كان عدد اعمدة المصفوفة الاولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية .

والمصفوفة الناتجة تكون رتبتها بعدد صفوف المجموعة الاولى وعدد اعمدة المجموعة الثانية (نحذف الرتبتين المتساويتان)

$$\underline{A_{13}} \times \underline{B_{34}} = \underline{AB_{14}}$$

متساويان

رتبة $\underline{AB}$

◄مثال:هل يمكن ايجاد حاصل ضرب $\underline{A}\ \underline{B}$ وان كانت كذلك فأوجد رتبة المصفوفة الجديدة :

- $\underline{A_{23}} \times \underline{A_{35}}$ نعم يمكن ذلك لان عدد اعمدة الاولى = عدد صفوف الثانية ، وينتج لنا مصفوفة من الرتبة 2×5

•• $\underline{A_{23}} \times \underline{A_{61}}$ لا ايمكن ايجاد حاصل الضرب ، لان عدد اعمدة الاولى $\neq$ عدد صفوف الثانية

خاص بالمستوى 2

مطويتك

مفهوم أساسي ضرب المصفوفات

التعبير اللفظي: العنصر في الصف m والعمود r من المصفوفة AB هو مجموع نواتج ضرب العناصر في الصف m من المصفوفة A، بعناصر العمود r من المصفوفة B بالترتيب.

الرموز:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times7 & 2\times6+3\times8 \\ 1\times5+4\times7 & 1\times6+4\times8 \end{bmatrix}$$

◄ اوجد XY إذا كانت $\underline{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. $\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

عدد اعمدة المصفوفة الاولى يساوي عدد صفوف المجموعة الثانية اذاً يمكن ضربها وينتج لنا مصفوفة من الرتبة 2×2

١) نضرب عناصر الصف الاول من المصفوفة الاولى في(عناصر العمود الأول ثم عناصر العمود الثاني)من المصفوفة الثانية ونجمعهم.

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\ \underline{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X} \times \underline{Y} = \begin{bmatrix} (4\times2)+(1\times5) & (4\times6)+(1\times3) \\ & \end{bmatrix}$$

٢)بنفس الطريقة نضرب عناصر الصف الثاني في المصفوفة الاولى في (عناصر العمود الأول ثم عناصر العمود الثاني)من المصفوفة الثانية ونجمعهم.

$$\underline{X} \times \underline{Y} = \begin{bmatrix} (4\times2)+(1\times5) & (4\times6)+(1\times3) \\ (-2\times2)+(3\times5) & (-2\times6)+(3\times3) \end{bmatrix}$$

$\underline{X} \times \underline{Y} = \begin{bmatrix} 13 & 27 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$ *الحل* .

المـحددات :

كل مصفوفة مربعة لها محددة ، وتسمى محددة المصفوفة من الرتبة 2×2 بمحددة الدرجة الثانية
.

مفهوم أساسي — **محدِّدة الدرجة الثانية**

التعبيراللفظي: يرمز لمحدِّدة المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ وقيمتها تساوي حاصل ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه حاصل ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرمـــوز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

القطر الرئيس

مثال: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (-3)(5) = 39$

تسمى محددة مصفوفة من الرتبة 3×3 بمحددة الدرجة الثالثة ويمكن حسابها باستعمال **قاعدة الاقطار** او بمحددة المصفوفة 2×2
١

مفهوم أساسي — **حساب محدِّدة المصفوفة 3 × 3**

أضف إلى مطويتك

الطريقة الأولى: باستعمال قاعدة الأقطار

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدِّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.

خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدِّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة الثانية: باستعمال محدِّدة المصفوفة 2 × 2 .

$$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

خاص بالمستوى 2

◄مثال: اوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الاقطار .

الحل ١) اعد كتابة العمود الاول والثاني

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{matrix}$$

٢)نوجد حاصل ضرب عناصر الاقطار و موازياتها

$$\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{4} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{vmatrix}\begin{matrix} \mathbf{4} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{5} \end{matrix}$$

-4(2)(3)=-24

5(6)(4)=120

9(-3)(-8)=216

4(2)(9)=72

-8(6)(-4)=192

3(-3)(5)=-45

٣)نجمع نواتج الضرب في كل مجموعة

-24+120+216=312　　　*72+192+(-45)=219*

٤)اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول .

219 – 312 = -93

فتكون قيمة المحددة *-93*

خاص بالمستوى 2

حل أنظمة المعادلات بالمصفوفات :

قاعدة كرامر: يمكنك استعمال المحدِّدات لحل أنظمة معادلات، فإذا كانت قيمة المحدِّدة لمصفوفة المعاملات لا تساوي صفرًا، فإن للنظام حلًّا وحيدًا. وإذا كانت قيمة المحدِّدة صفرًا، فإما أن يكون للنظام عدد لانهائي من الحلول أو لا حل له، وهنالك طريقة لحل أنظمة المعادلات الخطية تُسمى **قاعدة كرامر** .

مفهوم أساسي — **قاعدة كرامر** — أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned}$ ، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ ، وذلك إذا كانت $|\underline{C}| \neq 0$.

◄مثال :حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر :

5X-6Y=15 , 3X+4Y= -29

$$|\underline{C}| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - (3)(-6) = 36$$

$|\underline{C}| = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|\underline{C}|}$ قاعدة كرامر $|\underline{C}| = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|\underline{c}|}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{|38|}$ عوض $= \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{|38|}$

$= \dfrac{5(-29)-3(15}{38}$ احسب المحددات $= \dfrac{15(4)-(-29)(-6)}{38}$

$= -\dfrac{190}{38}$ بسط $= -\dfrac{(114)}{38}$

$= -5$ = - 3

حل النظام هو : (-3,-5)

التحقق نعوض بقيم $x\,,y$ في المعادلات :

5(-3)-6(-5)=15

3(-3)+4(-5)=-29

خاص بالمستوى 2

حل نظام من 3 معادلات بقاعدة كرامر :

مفهوم أساسي استعمال قاعدة كرامر لحل نظام من ثلاث معادلات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت C مصفوفة المعاملات للنظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned}$$

، حيث $\underline{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}$

فإن حل هذا النظام هو

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|},\ z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$$

وذلك إذا كانت $|C| \neq 0$.

◄ حل النظام الآتي باستعمال قاعدة كرامر: 4x+5y-6z= -14

3x-2y+7z= 47

7x-6y-8z=15

احسب محددة مصفوفة المعاملات $|\underline{c}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -6 & -8 \end{vmatrix} = 621$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & l \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} \text{ ، } y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & l \end{vmatrix}}{|\underline{c}|} \text{ ، } z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|\underline{c}|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -14 & 5 & -6 \\ 47 & -2 & 7 \\ 15 & -6 & -8 \end{vmatrix}}{621} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -14 & -6 \\ 3 & 47 & 7 \\ 7 & 15 & -8 \end{vmatrix}}{621} \text{ ، } z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 3 & -2 & 47 \\ 7 & -6 & 15 \end{vmatrix}}{621}$$

$$\frac{3105}{621} = 5 \qquad -\frac{1242}{621} = -2 \qquad \frac{2484}{621} = 4$$

حل النظام : (5 , -2 , 4)

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي — المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المصفوفة المحايدة لعملية الضرب ورمزها $\underline{I}$ هي مصفوفة الوحدة، والتي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان الناتج هو المصفوفة الأخرى.

لأي مصفوفة مربعة $\underline{A}$ لها رتبة مصفوفة الوحدة $\underline{I}$ نفسها، فإن $\underline{A} \cdot \underline{I} = \underline{I} \cdot \underline{A} = \underline{A}$.

الرمـــوز: إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، و $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان $\underline{A}$ $\underline{B}$ مربعتين ولهما الرتبة نفسها وكان $\underline{A}\,\underline{B} = \underline{B}\,\underline{A} = \underline{I}$

فإن $\underline{B}$ تسمى نظير ضربي ل $\underline{A}$ والعكس صحيح ، و اذا كان للمصفوفة $\underline{A}$ نظير ضربي فإنه يرمز اليه بالرمز $\underline{A}^{-1}$ حيث :

$$\underline{A} \times \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \times \underline{A} = \underline{I}$$

مثال 1 — التحقق من النظير الضربي

حدِّد ما إذا كانت كلّ من المصفوفتين تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى أم لا فيما يأتي:

(a $\underline{A} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

كل من المصفوفتين $\underline{A}, \underline{B}$ تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى إذا وفقط إذا كان $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I}$.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$ اكتب المعادلة

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ اضرب المصفوفتين

بما أن $\underline{A} \cdot \underline{B} \neq I$، فإن أيًّا منهما لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

خاص بالمستوى 2

ايجاد النظير الضربي للمصفوفة :

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة من النوع 2 × 2

النظير الضربي للمصفوفة $\underline{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$،
وذلك إذا كانت $|\underline{A}| \neq 0$.

مثال :

أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة فيما يأتي، إن وجد:

a) $\underline{P} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$|\underline{P}| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 - (-10) = 3$ احسب المحددة

بما أن قيمة المحدّدة لا تساوي صفرًا، فإن $\underline{P}^{-1}$ موجودة .

$\underline{P}^{-1} = 1/|\underline{P}| = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ تعريف النظير الضربي للمصفوفة من الرتبة 2 × 2

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $|\underline{P}| = 3$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ بسّط

قوانين المسافة و السرعة والزمن :

المسافة = السرعة × الزمن

$$\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} \quad ، \quad \text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

مثال : قطعت حافلة مسافة 300 كم بسرعة 50 كم/ س ، احسب الزمن المستغرق لقطع هذه المسافة

الحل : $\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{300}{50} = 6$ ساعات

مثال: يقطع أحمد 90 كم في ساعتين بالسيارة لو قاد بسرعة ثابتة ، ما المسافة التي يقطعها خلال نصف ساعة ؟

الحل : اولاً نوجد $\text{السرعة} = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{90}{2} = 45$ كم/س

اذاً يقطع 45 كم في ساعه وبذلك سيقطع في نصف ساعه $\frac{45}{2} = 22.5$

مثال: اذا كان احمد يقطع مسافة *540* كم في *4* ساعات و خالد يقطع نفس المسافة في *9* ساعات ، فكم يقطعان معاً من مسافة في *20* دقيقة ؟

سرعة احمد = $\frac{540}{4} = 135$ كم/س ، سرعة خالد = $\frac{540}{9} = 60$ كم/س

الان نوجد المســافة التي سيقطعانها في *20* دقيقة بعدما اوجدنا سرعتيهما ،

بما ان السرعة مُقاسة بالساعات إذاً نحول الدقائق الى ساعات (*20* دقيقة هي ثلث ساعة $\left(\frac{1}{3} = \frac{20}{60}\right)$

المسافة التي سيقطعها احمد = $135 \times \frac{1}{3} = 45$

المسافة التي سيقطعها خالد = $60 \times \frac{1}{3} = 20$

المسافة التي قطعوها معاً $45+20 = 65$

بعض الاسئلة التي تحوي على اكثر من سرعه (سيارتين ، شخصين ،..) تحتاج لعمل معادلة وحلها

المقدار الثابت نستخدم قانونه سواء كان(مسافة او زمن او سرعة) نساويه ونعوض بقانونه

مثال : سيارة سرعتها 60 كلو/ساعة ، سارت مدة 5 دقائق ، ثم انطلقت سيارة أخرى (من نفس نقطة بداية السيارة الأولى) وسرعتها 65 كلو/ساعة ، بعد كم من الزمن تلتقي السيارتان ؟

زمن السيارة الاولى سيكون اكثر بـ 5 دقائق (نفرض الزمن T)

بذلك [زمن السيارة الاولى T+5] و [زمن السيارة الثانية T]

المسافة التي قطعوها ستكون هي نفسها (ثابتة) ، لذلك نكون مساواة (معادلة) بقانون المسافة

المسافة التي قطعتها A = المسافة التي قطعتها B

(نعوض بقانون المسافة =السرعة×الزمن)

سرعة السيارة الأولى × T+5 = سرعة السيارة الثانية × T

$(T+5) \times 60 = T\times 65$

$300+60T = 65T$

$T=60 \rightarrow 5T=300$ اذاً سيلتقون بعد 60 دقيقة

انطلق احمد بسيارته بسرعة 7 متر/دقيقة ، وبعد انطلاق أحمد بـ 12 دقيقة ، انطلق علي بسرعة 9متر/دقيقة ، بعد كم دقيقة يصبح علي متقدم على أحمد بـ 10 متر ؟

هنا نفس الفكرة لكن على مرحلتين الأول يلتقون ومن ثم يتقدم علي على أحمد

زمن احمد (T+12) ، زمن علي T (المسافة نفسها ثابتة) اذا سنساويهما ونعوض بقانونها

المسافة التي قطعها احمد = المسافة التي قطعها علي

$(T+12) \times 7 = T \times 9$

$9T = 84 \times 7T$

$T=42 \rightarrow 2T=84$ بعد 42 دقيقة يلتقيان

الخطوة الثانية : (الزمن الذي سيقطعانه متساوي) نعوض بقانون الزمن

(مسافة احمد d) (مسافة علي d+10)

$$\frac{d}{7} = \frac{d+10}{9}$$

9d=7d+70 → d=35

المسافة التي قطعها احمد 35 والتي قطعها علي 45 ، الان المسافة معلومة والسرعة معلومة نستطيع ايجاد الزمن ،وذلك بالتعويض في احدى المعادلتين (زمن احمد او علي) لان الزمن نفسه في كليهما:

زمن علي = $\frac{45}{9}$ = 5 دقائق ، زمن احمد = $\frac{35}{7}$ = 5 دقائق

الان نجمع الزمنين التي قطعها علي (5+42) اذاً بعد 47 دقيقة يسبق علي ب 10 امتار .

مثال : المسافه بين مدينتين أ ،ب تساوي 810كلم .انطلقت شاحنه من المدينه أ بسرعه40 كم/س ، متجهه نحو المدينه ب ، وفي الوقت نفسه انطلقت شاحنة اخرى من المدينه ب متجهه نحو المدينه أ بسرعه 50 كم\ س ..على أي بعد من المدينه أ تلتقي الشاحنتان ؟؟

نرمز للمسافة المطلوبة(من المدينة أ) [d] ، وبذلك تكون المسافة من المدينة ب [810-d]

بما انها انطلقتا في الوقت نفسها اذاً الزمن الذي سيقطعانه حتى الالتقاء نفسه (ثابت)

نساوي الزمنين و نعوض بقانونيهما :

$$\frac{d}{40} = \frac{810-d}{50} \quad \rightarrow \quad 50d = -40d + 32400 \quad \rightarrow \quad d = 360$$

اسئلة المعيار الثاني :

١) سيارتان الأولى تسير بسرعة 100km/h والثانية بسرعة 110km/h بعد كم دقيقة يصبح الفارق بينهم 20km ؟

1	2	3	4

٢) انطلقت سيارة من الرياض إلى مكة بسرعة 60km/h وانطلقت بعدها بنصف ساعة سيارة اخرى بسرعة 80km/h فبعد كم دقيقة سيلتقيان ؟

15m	30m	60m	90m

٣) سيارة تسير بسرعة 53m/min ، وسيارة تسير بسرعة 75m/min ، انطلقتا معا" وفي نفس الاتجاه ، فكم ستكون المسافة بينهم بعد 15 دقيقة .

300	330	350	375

٤) المقدار $\frac{\frac{1}{x}-y}{\frac{1}{y}-x}$

y/x	X/y	1	xy

٥) عدد موجب اذا اضيف مربعه و اربعة امثاله ، كان الناتج 12 فما هو

2	4	6	8

٦) تستهلك سيارة في الساعة 30L ، وتستهلك سيارة أخرى 20L في الساعة ، احسب الفرق في عدد اللترات بينهما بعد مضي 10 ساعات .

100L	120L	210L	200L

٧) اشترت شركة بمبلغ 585000 شاحنتين و 5 سيارات صغيرة وكانت قيمة السيارة الصغيرة نصف قيمة الشاحنة ، كم سعر الشاحنة الواحدة ؟

65000	*85000*	*12000*	*130000*

٨) حنفية تملء الحوض في ساعتين والثانية في ثلاث ساعات والثالثة في ستة ساعات ، اذا كان الحوض فارغ وفتحت في وقت واحد بكم ساعة يمتلئ.

ساعه	ساعه ونصف	ساعتين	ساعتين ونصف

٩) عداءان يجريان باتجاهين متعاكسين حول مضمار دائري محيطه 140m يجري الأول بسرعة 4m/min والثاني 6m/min فكم المسافة التي قطعها الأول عند الالتقاء

56	65	48	84

١٠) قطارين انطلقوا من نقطة A ، القطار الاول انطلق بجهة الغرب بسرعة 90km/h و انطلق القطار الثاني بجهة الشرق بسرعة 75km/h كم تكون المسافة بينهم بعد ساعتين .

290 km	310km	330km	350km

١١) اذ كانت $f(x) = \sqrt{2x}$

$g(x) = 2x^2$ فإن $f \circ g\ (X)$

4X	2X	X	8X

١٢) ما قيمة X التي تحقق $\log_2(x+2)=3$

2	4	6	8

١٣) المعادلة التي جذراها .. $(\sqrt{3}+2)$ $(\sqrt{3}-2)$

- $X^2+\sqrt{3X}-1=0$
- $X^2+\sqrt{3X}+1=0$
- $7X^2+2\sqrt{3X}+1=0$
- $X^2+2\sqrt{3X}-1=0$

١٤) مجال الدالة $f(x)=\frac{(x^2-4x-5)}{x^2-x-2}$

- $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$
- $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$
- $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)\cup(-1,2)$
- $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,\infty)$

١٥) مجموعة حل المعادلة $tan^2x-3=0$ في الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\{\frac{\pi}{3}\}$	$\{\frac{\pi}{6}\}$	$\{-\frac{\pi}{3}\}$	$\{-\frac{\pi}{6}\}$

١٦) حل المعادلة $\sqrt{2x}+1=\sqrt{2x+2}$

1/2	1/4	1/8	1/16

١٧) مجموعة حل المعادلة في R $X^2-49=0$ هي

{-49,49}	{-7,7}	(-7,7)	$[-7,7]$

١٨) إذا كانت x={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} وكانت y={1, 3, 5, 7}

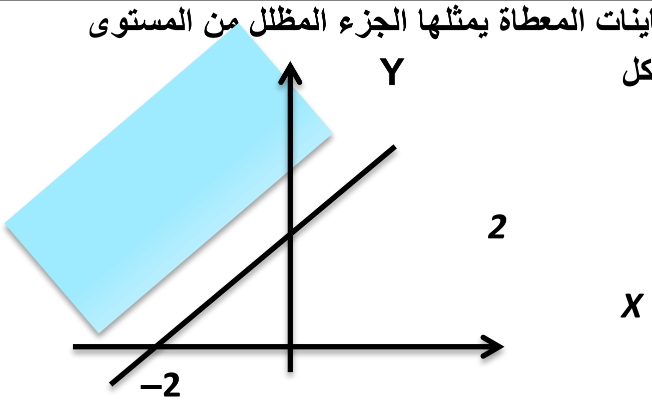
فإن متممة *y* بالنسبة ل *x* هي

{1,3,5}	{2,4,6}	{6,7}	{1,2,3,4,5,6,7}

١٩) $\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ تكون غير قابلة للانعكاس عندما تكون قيمة *a*

0	1	2	3

٢٠) أي من المتباينات المعطاة يمثلها الجزء المظلل من المستوى الموضح بالشكل



$y \geq x+2$	$y \geq x-2$	$y \leq x+2$	$y \leq x-2$

٢١) اذا كانت $5^x = 10$ فإن **x**

$\log \frac{1}{2}$	$\frac{-\log 10}{\log 5}$	$\frac{\log 10}{\log 5}$	$\frac{\log 5}{\log 10}$

٢٢) ميل المستقيم المار بالنقطتين : ***(1,4) , (-2,3)***

2	***1/2***	***1/3***	***3***

٢٣) *المقدار :* $XY(XY+1)^2 - X^2Y^2$ *يساوي :*

X^3Y^3+XY	$X^3Y^3+2X^2Y^2+XY$	$X^3Y^3+3X^2Y^2+XY$	$X^3Y^3+X^2Y^2+XY$

٢٤) *مجموعة حل المتباينة* $|X-3| > 1$ *هي :*

$(-\infty,2) \cup (4,\infty)$	$(-\infty,1) \cup (3,\infty)$	(2,4)	(1,3)

٢٥) $\frac{b^2-ab}{ab-a^2} + \frac{a^2-b^2}{ab}$ *تساوي :*

b	*a*	*b/a*	*a/b*

٢٦) ***اذا كان K عدد حقيقي و A مصفوفة مربعة من النوع n ×n***

فإن المحدد $|AK|$ *يساوي*

$k\|A\|^n$	$K^n\|A\|$	$nK\|A\|$	$K\|A\|$

٢٧) *يمكن حل معادلة من الدرجة الثانية:* $\mathbb{A}$ *إكمال المربع،* $\mathbb{B}$ *التحليل ،* $\mathbb{C}$ *القانون العام*

$\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$	$\mathbb{C},\mathbb{B}$	$\mathbb{A},\mathbb{C}$	$\mathbb{A},\mathbb{B}$

٢٨) *عين مجال الدالة :* $\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}-[0,\sqrt{2}]$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}-[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

٢٩) *ما قيمة* **X** *التي تجعل المصفوفة ليس لها نظير ضربي ؟* $\begin{bmatrix} X & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2	**4**	**3**	**6**

٣٠) حل المعادلة : $2x^2+3x+1=0$

$\{\frac{1}{16} \pm \frac{\sqrt{39}}{24}i\}$	$\{\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{39}}{24}i\}$	$\{\frac{-1}{8} \pm \frac{\sqrt{39}}{24}i\}$	$\{\frac{-1}{16} \pm \frac{\sqrt{39}}{24}i\}$

٣١) اوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$

$(\infty,1)$	$(-\infty,-1)$	***R***	***R-{-1}***

٣٢) ذهبت عائلة لتتناول الغداء في المطعم (مكونة من زوجين و 5 اطفال) بحيث ان سعر وجبة البالغ ضعف وجبة الطفل فكم قيمة وجبة البالغ إذا كان مجموع ما دفعوه 405

45	**60**	**90**	**30**

٣٣) مجال الدالة : $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ؟

R-{1}	R-{0}	R^+	R

٣٤) $\frac{\sqrt{6}}{4} \div \frac{\sqrt{3}}{12}$

$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$		

٣٥) مجال الدالة $1 < |x-3| \leq 2$

	$(1,2] \cup [4,5)$	$[1,2) \cup (4,5]$	$[1,5]$

٣٦) مجموعة حل المعادلة $3x^2 - 13x + 12 = 0$

$\left\{3, \frac{4}{3}\right\}$			

٣٧) اوجد الدالة العكسية $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1 + x	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1-x}{x}$	$\frac{x-1}{x}$

٣٨) إذا كان B – A = B فإن :

A=B	$B \subset A$	$A \subset B$	$A \cap B = \oint$

٣٩) اذا كان $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $f(x) = x^2 + 1$ فأوجد gof

x^2	$x\sqrt{x^2+2}$		

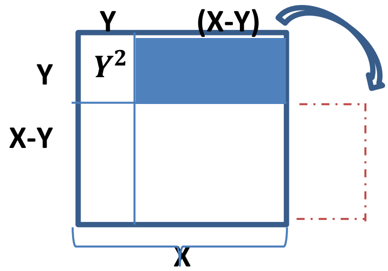
٤٠) اوجد المعكوس للمصفوفة (النظير) $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

٤١) اذا كان $\frac{n}{2m} = \frac{n+m}{3m}$ فإن قيمة $\frac{n}{m}$ ؟

1	2	3	4

٤٢) اذا قطعنا المضلل من الشكل ووضع في موقع اخر فإنه سيمثل العلاقة

$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$
$(X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$
$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$



الحلــول :

١) الزمن الذي قطعتاه نفسه (ثابت) وهو مجهول نستخدم قانون الزمن ونساويهما ، نرمز للمسافة التي قطعتها السيارة الاولى d ، والمسافة التي قطعتها السيارة الثانية d+20 (لانها الاسرع)

$$\frac{100}{d} = \frac{110}{d+20} \quad \rightarrow \ 110d = 100d + 2000 \ \rightarrow d = 200$$

المسافة التي قطعتها السيارة الاولى *200* وسرعتها *100* نوجد الزمن :

$\frac{200}{100} = 2$ الحل بعد ساعتين ، وتحويلها بالدقائق تكون بعد *120* دقيقة

---

٢) المسافة التي قطعتها السيارة الاولى= 80. T (السرعة ضرب الزمن)

مسافة السيارة الثانية : $60 .(t + \frac{1}{2})$ (تزيد عن زمن الاخرى بنصف ساعة)

عندما يلتقيان فإن المسافة التي قطعوها هي نفسها إذا"

$60 .(t + \frac{1}{2}) = 80. t$

60 t + 30 = 80 t

30= 20t

T = $\frac{3}{2} = 1.5$

الزمن ساعة ونص = 90 دقيقة

---

٣) قانون المسافة = السرعة . الزمن ... سنحسب المسافة التي قطعوها بعد 15 دقيقة

53 .15 = 795 ، 76 . 15 =1125

ننقص المسافتين من بعض 1125-795= 330

---

٤) نوحد المقامات

$\dfrac{\frac{1-xy}{x}}{\frac{1-xy}{y}}$ ثم (نحول القسمة لضرب ونضع مقلوب المقام)

$$\frac{1-xy}{x} \times \frac{y}{1-xy} = \frac{y}{x}$$

---

٥) نحول العبارة الى معادلة : $x^2 + 4x = 12$

$$x^2 + 4x = 12$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

(x +6) (x-2)=0 *نحلل المعادلة عددان جمعهما* 4 *وضربهما* -12

X= -6 او x= 2 لان المطلوب موجب

---

٦) 300-200=100L → 20×10=200 , 30×10=300

---

٧) قيمة الشاحنة X وقيمة السيارة $\frac{X}{2}$ نحولهم معادلة :

$$2X + 5\left(\frac{X}{2}\right) = 585000$$

$\frac{4X+5X}{2} = 585000 \rightarrow 9x = 117000 \rightarrow x = 130000$

٨) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$ في ساعة واحدة فقط

٩) عند الالتقاء يكون الوقت الذي قطعوه نفسه T ، نرمز للمسافة F وقيمتها 140
والسرعتان : 4 , 6

$4.T = F_1$ ، $6.T = F_2$ ، نظام معادلتين نقوم بالجمع

140

$F_1 + F_2 = 6T + 4T \rightarrow 10T = 140 \rightarrow T = 14\ min$

وبعد ان عرفنا الزمن نوجد المسافة التي قطعها الأول : $F_1 = 4(14) = 56$

١٠) 90 × 2 = 180 ، 75 × 2 =150 ،
وبما ان كل سيارة في اتجاه اخر نجمع المسافتين 330 =150+180
لو كان في السؤال ان السيارتين في اتجاه واحد (نطرح المسافتين)

١١) $f(2x^2) = \sqrt{2(2x^2)}$
$= \sqrt{4x^2} = 2x$

١٢) $2^3 = x + 2$ تعريف اللوغاريتم
$8 = x + 2 \quad \rightarrow x = 6$

١٣) جذري المعادلة هما (حلي المعادلة): هما اللذان جمعهما يعطينا الطرف الاوسط وضربهم الطرف الاخير (الثابت)

الحد الثابت $(\sqrt{3}-2) \times (\sqrt{3}+2) = 3 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4 = -1$

الحد الاوسط $(\sqrt{3}-2) + (\sqrt{3}+2) = 2\sqrt{3}$

اذا" المعادلة $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ ،، ومن الممكن تجربة الخيارات بحل كل معادلة على حدة بأي طريقة سواء بالتحليل او القانون العام حتى نتوصل للحل المطلوب.

١٤) لإيجاد مقام الدالة نوجد اصفار المقام (الارقام التي تجعل المقام صفر)
تحليل $x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow (x+1)(x-2)$
اصفار المقام ، X = -1 , x = 2
إذا" المجال : جميع الاعداد الحقيقية باستثناء {-1,2}

(a,b)	تعني ان الحل جميع الاعداد في الفترة باستثناء العددين على طرفيه a ,b
$[a,b]$	تعني ان الحل جميع الاعداد في الفترة بالإضافة الى العددين على طرفيه a ,b
$\{a,b\}$	تعني ان الحل العددين a ,b فقط

- الاختيار الأول: $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$ يعني ان المجال جميع الاعداد الاصغر من واحد والاكبر من 2 ،، لكن يوجد اعداد اخرى في المجال لم تذكر وهي الاعداد بين -1 و 2 ، خيار خاطئ
- الثاني: $(-\infty,-2) \cup (1,\infty)$ ، في هذا المجال استثنينا 1,-2 من المجال وهي ليست اصفار المقام ... خيار خاطئ

- الثالث: $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)\cup(-1,2)$ ، يعني ان المجال جميع الاعداد الاصغر من واحد والاكبر من 2 ،، هي الاعداد بين 1- و 2 ، خيار صحيح
- الرابع: $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,\infty)$ ، في هذا المجال استثنينا 1,- 2 من المجال وهي ليست اصفار المقام ... خيار خاطئ

١٥) $\tan^2 x - 3 = 0 \rightarrow \tan^2 x = 3 \rightarrow \sqrt{(\tan x)^2} = \sqrt{3}$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

ومن جدول النسب المثلثية المشهورة ، نعلم ان الزاوية التي ظلها $\sqrt{3}$ هي الزاوية 60

إذاً" x=60 ، نحولها بالراديان : $60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

١٦) ناخذ الجذر للطرفين

$$(\sqrt{2x}+1)^2 = (\sqrt{2x+2})^2 \rightarrow \cancel{2x} + 2\sqrt{2x} + 1 = \cancel{2x} + 2$$

بعد التبسيط $\sqrt{2x} = \frac{1}{2}$ ، نربع الطرفين مره اخرى للتخلص من الجذر

$$2x = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2\times 4} = \frac{1}{8}$$

١٧)نحل المعادلة : $x^2 = 49$ واخذ الجذر للتخلص من التربيع : $x = \pm 7$

يوجد حلان فقط للمعادلة وهما {-7,7}

١٨) {2,4,6} المتتمة هي العناصر الموجودة في X ولا توجد في Y

١٩) تكون مصفوفة غير قابلة للأنعكاس عندما تكون قيمة المحدد صفر .

نوجد المحدد و نساويه بصفر لنكتشف قيمة a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = (1.1.0)+(0.1.1)+(a.0.1) - (1.1.a)+(0.1.1)+(0.0.0)=0$$

(0)+(0)+(0) – (a)+(0)+(0)=0

- a = 0 اذا" الحل هو 0

٢٠) نلاحظ في الرسم ان مقطع Y هو 2 ،، إذاً الحل سيكون إما :

$y \geq x+2$ او $y \leq x+2$ والان نحدد الصحيحة بينهم ،

الجزء المظلل لا يحتوي النقطة (0,0) ، اذاً عندما نعوض بقيمتها فإن المتباينة ستكون خاطئة : نجرب والخيار: $y \geq x+2$ هو المناسب

$0 \ngeq 2$, $0 \geq 0+2$ (راجع درس رسم المتباينات الخطية)

٢١) نأخذ اللوغاريتم للطرفين $\log 5^x = \log 10$ قانون لوغارتم القوة

$x \log 5 = \log 10 \rightarrow \rightarrow \quad x = \frac{\log 10}{\log 5}$

---

٢٢) الميل هو فرق الصادات على فرق السينات = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\frac{3-4}{-2-1} = \frac{1}{3}$

---

٢٣) $XY(XY+1)^2 - X^2Y^2$

نفك الاس(مربع الاول + مربع الثاني + 2 ضرب الاول والثاني) :

$XY(X^2Y^2 + 2XY + 1) - X^2Y^2$ ثم نبسط (نضرب في القوس) ونجمع

$= X^3Y^3 + 2X^2Y^2 + XY - X^2Y^2$

$= X^3Y^3 + X^2Y^2 + XY$

---

٢٤) المقدار داخل القيمة المطلقة يكون موجب او سالب

$X - 3 > 1 \quad , \quad X - 3 < -1$

$X > 3 + 1 \quad , \quad X < 3 - 1$

$X > 4 \quad , \quad X < 2$

مجموعة الحل ستكون جميع الاعداد الاصغر من 2 و الاكبر من 4 $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

---

٢٥)

$$\frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{b(b-a)}{a(b-a)} + \frac{(a-b)(a+b)}{ab}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a^2 - b^2 + b^2}{ab}$$

---

٢٦) الحل : $K^n|A|$

---

٢٧) مكن حلها با لثلاث طرق المكتوبة $\mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}$

---

٢٨)يجب ان يكون ما تحت الجذر موجب واكبر من الصفر

$x^2 - 2 > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 > 2$

$\rightarrow \quad x > \sqrt{2} \quad , \quad x < -\sqrt{2}$

بعد اخذ الجذر للطرفين فإن ما تحت الجذر سيكون موجب او سالب

$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \quad = \mathbb{R} - [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

يمكن ان يعبر عن المجال بطريقتين جميعها صحيحة

---

٢٩) المصفوفة لا يكون لها نظير ضربي عندما يكون محددها صفر
نوجد المحدد ونساويه بصفر لنستنتج قيمة **X**

المحدد : **(X . 2) - (3 . 4) = 0**

2X – 12 =0 >> X =6

٣٠) A=12 , b=3 , c=1
بالقانون العام :

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4(12)(1)}}{2(12)} = \frac{-3\pm\sqrt{-39}}{24}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-3}{24} \pm \frac{\sqrt{39}!}{24} \quad \rightarrow \{\frac{-1}{8} \pm \frac{\sqrt{39}}{24}\mathrm{i}\}$$

٣١) مجال الدالة الكسرية جميع الارقام باستثناء اصفار المقام X+1=0 > X=-1
اذا" المجال ***R-{-1}***

٣٢) نفرض سعر وجبة البالغ x إذاً ستكون وجبة الطفل $\frac{x}{2}$ ،، نكتب مجموع وجباتهم على شكل معادلة :

$$2x + 5\left(\frac{x}{2}\right) = 405 \quad \rightarrow \quad \frac{4x+5x}{2} = 405$$

سعر وجبة البالغ 90 ، $9x = 810 \quad \rightarrow x = \frac{810}{9} = 90$

٣٣) لكي تكون الدالة معرفة يجب ان يكون المقام لا يساوي الصفر R- $\{0\}$
لكي يكون الجذر معرف يجب ان يكون اكبر او يساوي الصفر $R^+ + \{0\}$

$$\mathrm{R} - \{0\} \ \cap \ R^+ + \{0\} = R^+$$

٣٤)

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3\times 6}}{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

انطاق المقام

٣٥)

$\mathrm{x} - 3 \le 2 \ \rightarrow x \le 3 + 2 \ \rightarrow \ x \le 5$

$-(x-3) \le 2 \ \rightarrow \ x - 3 \ge -2 \ \rightarrow x \ge 1$

المجال : $1 \le x \le 5$

1 , 5 و جميع الاعداد الاكبر من *1* و الاصغر من *5*

فترة مغلقة قوس مغلق لان العددين ينتمون للفترة

$1 < x - 3 \quad 1 + 3 < x \ \rightarrow \ 4 < x$

$1 < -(x-3) \ \rightarrow \ -1 > x - 3 \ \rightarrow 2 > x$

المجال : $4 < x < 2$

جميع الاعداد الاكبر من 4 والاصغر من 2

فترة مفتوحة قوس مفتوح لان الاعداد لا تنتمي للفترة

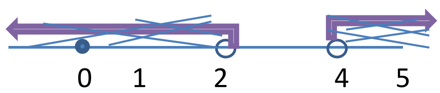
إذا" المجال لهذه الجهة $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

الملزمة مجانية لا احلل

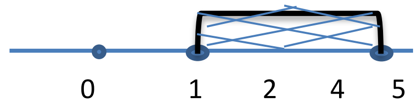
مجال الدالة هو تقاطع المجالين (المجال المشترك)

$$(-\infty,2)\cup(4,\infty)\ \cap\ [1,5]=\ [1,2)\cup(4,5]$$

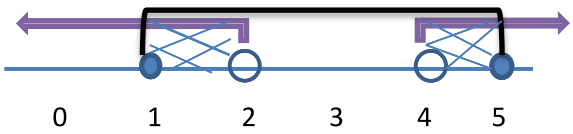
توضيح بالرسم :



$(-\infty,2)\cup(4,\infty)$



$[1,5]$



$[1,2)\cup(4,5]$

---

٣٦) نوجد عددين مجموعهما <u>b = -13</u> و ضربهما <u>36 = 3.12 = ac</u>

العددين هما : -4 , -9

$$3x^2-9x-4x+12=0$$
$$3x(x-3)-4(x-3)=0$$
$$(x-3)(3x-4)=0$$
$$(x-3)=0\ \rightarrow\ x=3$$
$$(3x-4)=0\ \rightarrow\ 3x=4\ \rightarrow\ x=\frac{4}{3}$$

او تحل بالقانون العام

٣٧)

نبدل اماكن المتغيرين

$$y=\frac{1}{x+1}\quad\rightarrow\quad x=\frac{1}{y+1}$$

طرفين في وسطين ثم تبسيط

$$x(y+1)=1\ \rightarrow\ y+1=\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow\ y=\frac{1}{x}-1\quad\rightarrow y=\frac{1-x}{x}$$

٣٨) نفرض ان A=B صحيح $A=\{1,2\}$ ، $B=\{1,2\}$:

خاطئ لا يحقق المطلوب $B-A=\{1,2\}-\{1,2\}=0$

نفرض ان $B\subset A$ صحيح $A=\{1,2,3\}$ ، $B=\{1,2\}$:

خاطئ لا يحقق $B-A=\{1,2\}-\{1,2,3\}=0$

نفرض ان $A\subset B$ صحيح $A=\{1,2\}$ ، $B=\{1,2,3\}$

خاطئ لا يحقق $B-A=\{1,2,3\}-\{1,2\}=\{3\}$

نفرض ان $B\cap A=\oint$ صحيح $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4\}$

صحيح يحقق المطلوب $B-A=\{3,4\}-\{1,2\}=\{3,4\}=B$

٣٩)

$$gof=\sqrt{(x^2+1)^2-1}\ =\ \sqrt{x^4+2x^2+1-1}$$

$$gof=\sqrt{x^2(x^2+2)}=x\sqrt{x^2+2}$$

الحل الصحيح $x\sqrt{x^2+2}$

٤٠)المعكوس هو : $\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

نوجد المحدد اولاً" : $ab-0=ab$

$$\frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b & -1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{b}{ab} & \frac{-1}{ab} \\ 0 & \frac{b}{ab} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-1}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

٤١)

$$\frac{n+m}{3m}=\frac{n}{2m}\ \to\ n+m=\frac{3m\,n}{2m}\ \to\ n+m=\frac{3n}{2}$$

$$m=\frac{3n}{2}-n\ \to\ m=\frac{3n-2n}{2}\ \to\ m=\frac{n}{2}\ \to\ 2=\frac{n}{m}$$

طريقة أخرى : نجرب الخيارات ونرى ايهما تحقق المعادلة نفرض ان $\frac{n}{m}=2$ صحيحة ، إذاً" $n=2m$ نعوض في المعادلة

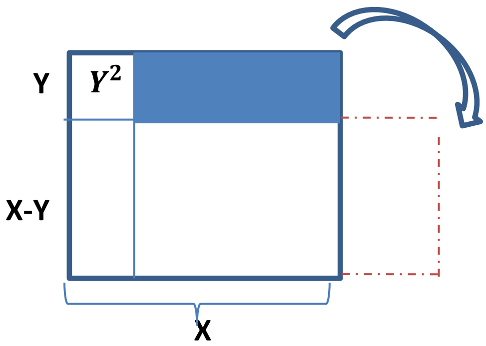
$$\frac{2m+m}{3m}=\frac{2m}{2m}\ \to\ \frac{3m}{3m}=\frac{2m}{2m}\ \to\ 1=1$$

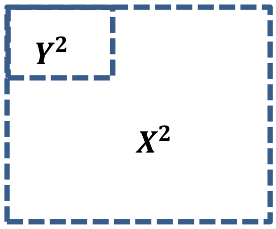
معادلة صحيحة إذاً" الفرض صحيح

٤٢)

قبل القطع الشكل يمثل العلاقة :

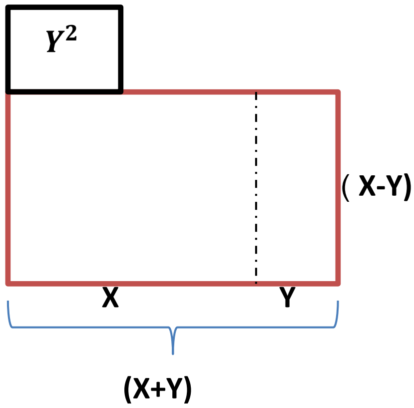
$$(X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$$





مساحة الشكل ككل = X^2

☼ **بعد القطع سيصبح الشكل :**



مساحة الشكل الطول × العرض : (X+Y)(X-Y)

وهو عبارة عن الشكل الكلي X^2 ننقص منه Y^2

(X+Y) (X-Y) = $X^2 - Y^2$

المستوى 2

المعيار الثالث و الرابـع :

المعيار	المؤشرات
المعيار ٣. ٤. ٣: يتعرف مفاهيم الهندسة ونظرياتها	١. يستخدم خصائص الخطوط المتوازية والمتعامدة والزوايا لمعرفة الأشكال ٢. يستخدم العلاقات الهندسية (نظرية فيثاغورس، تشابه المثلثات، تقاطع مستقيم مع مستقيمين متوازيين,.....) لحل المسائل ٣. يتعرف أنواع المثلثات وحالات تطابق مثلثين ٤. يصف خصائص الأشكال الرباعية ٥. يشرح صفات الأشكال ثلاثية الأبعاد وخصائصها ٦. يوجد ميل ومعادلة مستقيم في المستوي وعلاقته بمستقيم آخر ٧. يوجد المسافة بين نقطتين أو نقطة و مستقيم في المستوي ٨. يمثل التحويلات الهندسية (التناظر والانسحاب والدوران ومغير البعد) ٩. يحدد العلاقة بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيمين ١٠. يستخدم العلاقات المترية في المثلث ١١. يتعرف القطوع المخروطية ويميز معادلاتها وخصائصها ويمثلها بيانيا ١٢. يتعرف الدوال المثلثية والعلاقة بينها ١٣. يتعرف المتجهات ويجري العمليات عليها ١٤. يحل مسائل تطبيقية على الهندسة المستوية والفراغية
المعيار ٣. ٤. ٤: يتعرف القياس ووحداته وتطبيقاته	١. يتعرف وحدات القياس (وحدة قياس الزوايا، الطول، المحيط، المساحة، الحجم، درجة الحرارة، الزمن) ٢. يحول بين وحدات القياس المختلفة ضمن النظام نفسه ٣. يوجد محيط ومساحة المثلث والدائرة والأشكال الرباعية ٤. يحسب حجوم بعض المجسمات، ويوجد مساحتها الجانبية والكلية ٥. يحل مسائل تتضمن مقياس رسم باستخدام النسبة والتناسب ٦. يوظف التقريب في القياس ٧. يحل مسائل رياضية تطبيقية على القياس

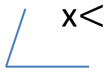
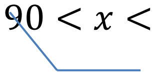
المستوى 1

المعيار٣. ٢. ٣: يتعرف مفاهيم الهندسة ونظرياتها	١. يستخدم خصائص الخطوط المتوازية والمتعامدة والزوايا لمعرفة الأشكال. ٢. يتعرف أنواع المثلثات وحالات تطابق مثلثين. ٣. يصف خصائص الأشكال الرباعية. ٤. يشرح صفات الأشكال ثلاثية الأبعاد وخصائصها. ٥. يوجد ميل ومعادلة مستقيم في المستوي وعلاقته بمستقيم آخر. ٦. يوجد المسافة بين نقطتين أو نقطة ومستقيم في المستوي. ٧. يمثل التحويلات الهندسية (التناظر والانسحاب والدوران). ٨. يحدد العلاقة بين الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيمين. ٩. يحل مسائل تطبيقية على الهندسة المستوية.
المعيار٣. ٣. ٤: يتعرف القياس ووحداته وتطبيقاته	١. يتعرف وحدات القياس (وحدة قياس الزوايا، الطول، المحيط، المساحة، الحجم، درجة الحرارة، الوقت). ٢. يحول بين وحدات القياس المختلفة ضمن النظام نفسه. ٣. يوجد محيط ومساحة المثلث والدائرة والأشكال الرباعية. ٤. يحسب حجوم بعض المجسمات، ويوجد مساحتها الجانبية. ٥. يحل مسائل تتضمن مقياس رسم باستخدام النسبة والتناسب. ٦. يوظف التقريب في القياس. ٧. يحل مسائل رياضية تطبيقية على القياس.

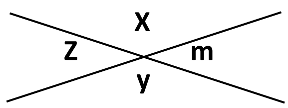
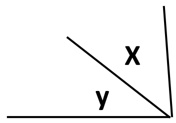
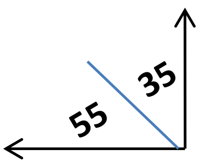
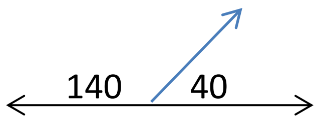
الـزوايــا :

الزاوية لها ضلعان يلتقيان في نقطة (الرأس) وتقاس بوحدة تسمى الدرجة .وإذا قسمت دائرة إلى 360 جزء متساوي فإن كل جزء قياسه درجة واحدة

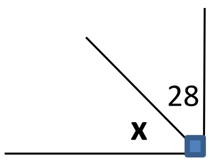
وتصنف الزوايا بحسب قياساتها الى 4 انواع ،

قائمة	حادة	منفرجة	مستقيمة
x=90 	x< 90 	$90 < x < 180$ 	x=180

الرمز المربع عند الزاوية يعني انها قائمة (قياسها 90)

زاويتان متقابلتان بالرأس : (متطابقتان)	**الزاويتان غير المتجاورتين الناتجتان عن تقاطع مستقيمين . z=m و x=y**	
الزاويتان المتجاورتان	**لهما رأس وضلع مشترك**	
زاويتين متتامتان	**مجموع قياسهما = 90**	
زاويتين متكاملتان	**مجموع قياسهما = 180**	

مثال : اوجد قياس الزاوية x ؟



نلاحظ ان الزاوية قائمة (رمز المربع)

وقياسها 90 إذا" :

$$x + 28 = 90 \quad \rightarrow \quad x = 90 - 28 \quad \rightarrow x = 62$$

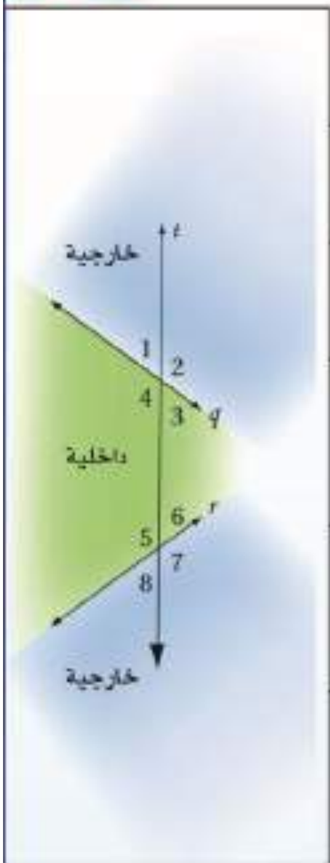
يسمى المستقيمان اللذان يتقاطعان بزاوية قائمة (**مستقيمين متعامدين**)

و اللذان يقعان في المستوى نفسة ولا يتقاطعان ابدا (**مستقيمين متوازيين**)

ويسمى المستقيم الذي يقطع مستقيمين او أكثر قاطع ، ويتكون من ذلك ثماني زوايا لها اسماء خاصة وبينها

علاقات أزواج الزوايا الناتجة عن القاطع

مطويتك



توجد أربع **زوايا داخلية** في المنطقة بين المستقيمين r، q.	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
توجد أربع **زوايا خارجية** في منطقتين ليستا بين r، q.	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
الزاويتان المتحالفتان هما زاويتان داخليتان واقعتان في جهة واحدة من القاطع t.	$\angle 4$ و $\angle 5$، $\angle 3$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان داخليًا هما زاويتان داخليتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 3$ و $\angle 5$، $\angle 4$ و $\angle 6$
الزاويتان المتبادلتان خارجيًا هما زاويتان خارجيتان غير متجاورتين تقعان في جهتين مختلفتين من القاطع t.	$\angle 1$ و $\angle 7$، $\angle 2$ و $\angle 8$
الزاويتان المتناظرتان هما زاويتان تقعان في جهة واحدة من القاطع t وفي الجهة نفسها من المستقيمين r، q.	$\angle 1$ و $\angle 5$، $\angle 2$ و $\angle 6$ $\angle 3$ و $\angle 7$، $\angle 4$ و $\angle 8$

بحيث ان :

الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

والزاويتان المتبادلتان داخليا متطابقتان

والزاويتان المتبادلتان خارجيا متطابقتان

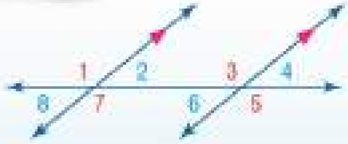
 # اما الزاويتان المتحالفتان (متكاملتان)

مسلمة 2.1 مسلّمة الزاويتين المتناظرتين

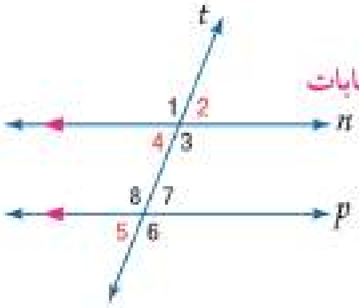
أضف إلى مطويتك

إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 7, \angle 6 \cong \angle 8$



في الشكل المجاور: $m\angle 5 = 72°$. أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين، واذكر المسلمات أو النظريات التي استعملتها. (1A-1C) انظر ملحق الإجابات



a) $\angle 4$

$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$m\angle 4 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 4 = 72°$	بالتعويض

b) $\angle 2$

$\angle 2 \cong \angle 4$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$\angle 4 \cong \angle 5$	مسلّمة الزاويتين المتناظرتين
$\angle 2 \cong \angle 5$	خاصية التعدي للتطابق
$m\angle 2 = m\angle 5$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 72°$	بالتعويض

نظريات المستقيمان المتوازيان وأزواج الزوايا

أضف إلى مطويتك

2.1 نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين داخليًا متطابقتان.

أمثلة: $\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 4$

2.2 نظرية الزاويتين المتحالفتين: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متحالفتين متكاملتان.

أمثلة: $\angle 1$ و $\angle 2$ متكاملتان.

$\angle 3$ و $\angle 4$ متكاملتان.

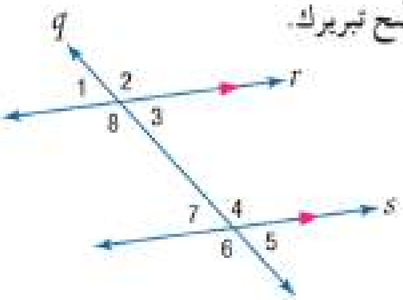
2.3 نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيًا: إذا قطع قاطع مستقيمين متوازيين، فإن كل زاويتين متبادلتين خارجيًا متطابقتان.

أمثلة: $\angle 5 \cong \angle 7$ و $\angle 6 \cong \angle 8$

تخطيط المدن: شارع الروضة وشارع النسيم متوازيان ويقطعهما شارع الحديقة.
فإذا كان $m\angle 1 = 118^\circ$، فأوجد $m\angle 2$.

$\angle 2 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
$m\angle 2 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 2 = 118^\circ$	بالتعويض

جبر: استعمل الشكل المجاور لإيجاد المتغير في كل مما يأتي. وضّح تبريرك.



a) إذا كان $m\angle 1 = 85^\circ$, $m\angle 4 = (2x - 17)^\circ$، فأوجد قيمة x.

$\angle 3 \cong \angle 1$	نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس
$m\angle 3 = m\angle 1$	تعريف تطابق الزوايا
$m\angle 3 = 85^\circ$	بالتعويض

بما أن المستقيمين r, s متوازيان، فإن الزاويتين $\angle 3$, $\angle 4$ متكاملتان بحسب نظرية الزاويتين المتحالفتين.

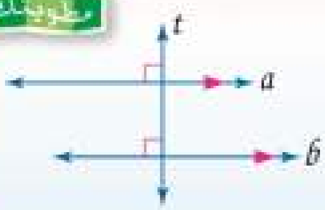
$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$	تعريف الزاويتين المتكاملتين
$85 + 2x - 17 = 180$	بالتعويض
$2x + 68 = 180$	بالتبسيط
$2x = 112$	بطرح 68 من كلا الطرفين
$x = 56$	بقسمة كلا الطرفين على 2

نظرية 2.4 نظرية القاطع العمودي

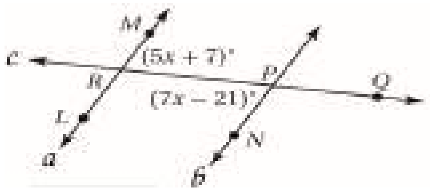
أضف إلى مطويتك

إذا كان مستقيم عموديًا على أحد مستقيمين متوازيين في مستوى، فإنه يكون عموديًا على المستقيم الآخر.

مثال: إذا كان $a \parallel b$، و $a \perp t$، فإن $b \perp t$.



مثال : إذا كان $a||b$ فأوجد $m < MRQ$



نعلم من الشكل ان $m\angle RPN = (7x - 21)$ ،
والمطلوب ايجاد $m\angle(5x + 7) = m\angle MRQ,$

$m\angle RPN$ و $m\angle MRQ$ متبادلتان داخليا" ،
وحتى يكون المستقيمان *a* ، *b* متوازيين يجب ان تكون الزاويتان المتبادلتان داخليا" متطابقتين ، لذا : $m\angle MRQ = m\angle RPN$ والان نعوض بقياسات الزوايا المعطاة في هذه المعادلة وحلها لإيجاد قيمة x .

$$m\angle MRQ = m\angle RPN$$

$$5x + 7 = 7x - 21$$

$$7 = 2x - 21$$

$$28 = 2x$$

$$14 = x$$

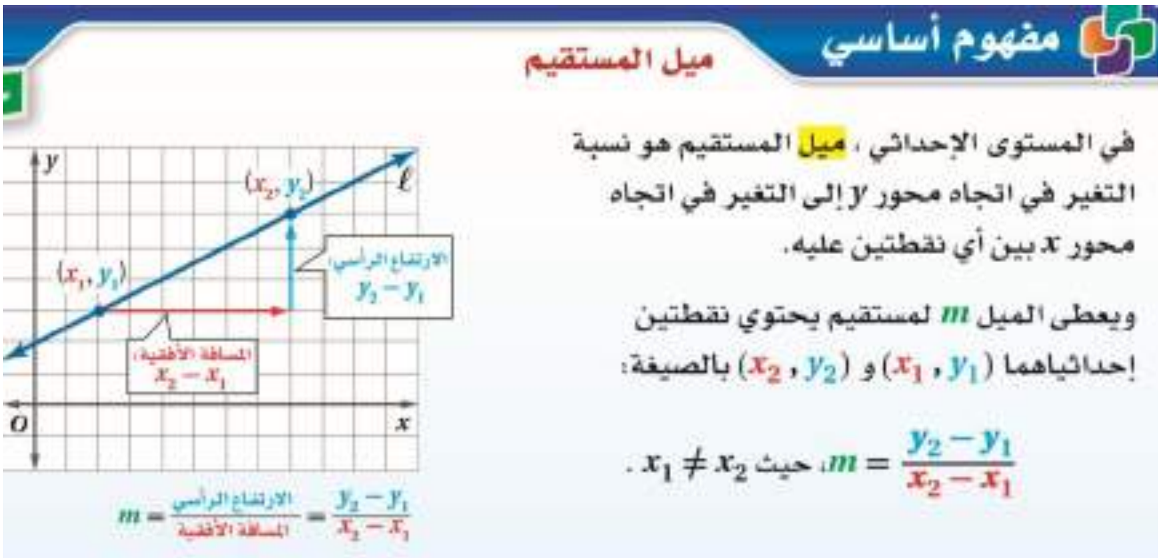
الأن نستعمل قيمة x لإيجاد $m\angle MRQ$

$$m\angle MRQ = 5x + 7 \quad \rightarrow 5(14) + 7 = 77$$

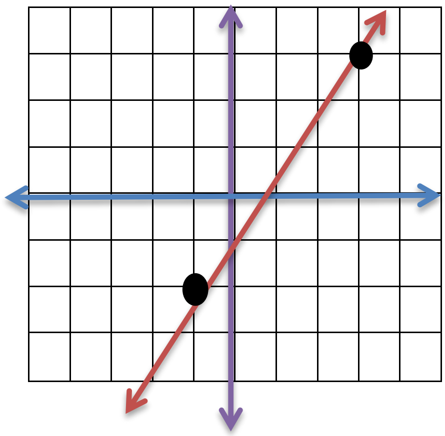
تحقق : نستعمل قيمة *x* لإيجاد $m\angle RPN$

$$m\angle RPN = 7x - 21 \quad \rightarrow \quad 7(14) - 21 = 77$$

ميل المستقيـــم



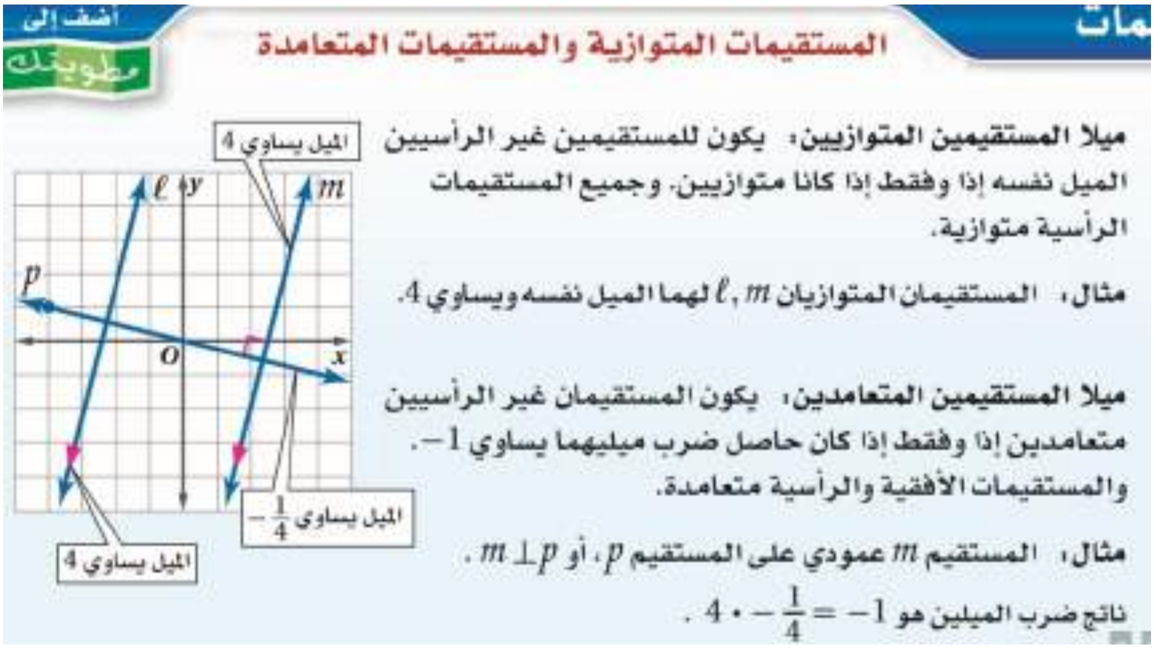
◄اوجد ميل المستقيم المرسوم :



نعوض عن (x_1, y_1) بـ (-1,-2) وعن (x_2, y_2) بـ (3 , 3)

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{3-(-2)}{3-(-1)} = \frac{5}{4}$$ الميل

المستقيمات المتوازية والمتعامدة :



المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة

أضف إلى مطويتك

ميلا المستقيمين المتوازيين: يكون للمستقيمين غير الرأسيين الميل نفسه إذا وفقط إذا كانا متوازيين. وجميع المستقيمات الرأسية متوازية.

مثال: المستقيمان المتوازيان ℓ, m لهما الميل نفسه ويساوي 4.

ميلا المستقيمين المتعامدين: يكون المستقيمان غير الرأسيين متعامدين إذا وفقط إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي -1. والمستقيمات الأفقية والرأسية متعامدة.

مثال: المستقيم m عمودي على المستقيم p، أو $m \perp p$.
ناتج ضرب الميلين هو $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$.

◄ حدد ما اذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{CD}$ $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيان او متعامدان او غير ذلك

اذا كانت A(1,1) B(-1,-5) C(3,2) D(6,1) ؟

١ نوجد ميل كل مستقيم :

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $3 = \frac{-6}{-2} = \frac{-5-1}{-1-1}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $-\frac{1}{3} = \frac{1-2}{6-3}$

بما ان الميلان غير متساويان اذا" المستقيمان غير متوازيان

نبحث التعامد وذلك بإيجاد حاصل ضرب ميليهما

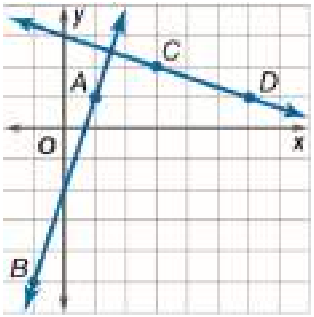
$$3 \times \frac{-1}{3} = -1$$

بما ان حاصل الضرب -1 فهما متعامدان .

....

ويمكن التحقق بالرسم البياني : حيث نحدد النقاط

ونوصلها ببعض ويتكون لنا متعامدان .



إرشادات للدراسة

ميلا المستقيمين المتعامدين

إذا كان ميل المستقيم ℓ يساوي $\frac{a}{b}$، فإن ميل المستقيم العمودي على ℓ هو معكوس مقلوب ميله، أي $-\frac{b}{a}$ ؛ لأن $\frac{a}{b}\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$.

☼مثال : مثل بيانيا المستقيم الذي يمر بالنقطة $A(-3,0)$ ويعامد $\overleftrightarrow{CD}$ حيث $c(-2,-3)$ $D(2,0)$

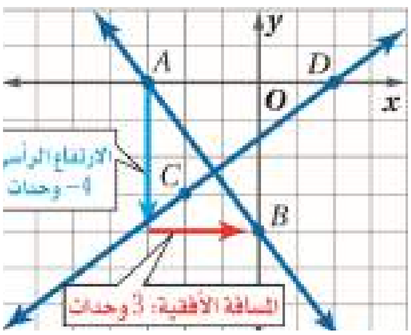
الحل : ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{3}{4} = \frac{0-(-3)}{2-(-2)}$ ، و بما ان $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) = -1$

فإن ميل المستقيم العمودي على $\overleftrightarrow{CD}$ والمار بالنقطة يساوي $-\frac{4}{3}$

لتمثيل المستقيم بيانيا" ، ابدأ من النقطة A ،

وتحرك 4 وحدات الى اسفل ،ثم 3 وحدات يمين

وسم النقطة B ، ثم ارسم $\overleftrightarrow{AB}$



معادلـة المستقيـــم :

مفهوم أساسي — **معادلة المستقيم غير الرأسي**

أضف إلى مطويتك

صيغة الميل والمقطع لمعادلة المستقيم هي $y = mx + b$ ، حيث m ميل المستقيم، و b مقطع المحور y.

$y = 3x + 8$ ، $y = mx + b$ (الميل ، مقطع المحور y)

صيغة الميل ونقطة لمعادلة المستقيم هي $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، حيث (x_1, y_1) إحداثيا أيّ نقطة على المستقيم، m ميل المستقيم.

نقطة على المستقيم $(3, 5)$

$y - 5 = -2(x - 3)$ (الميل)

◄ اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ومقطع المحور Y = -2

$$y = mx + b$$

$$y = 3x + (-2)$$

$$y = 3x - 2$$

◄ اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة المستقيم المار بزوج النقاط :

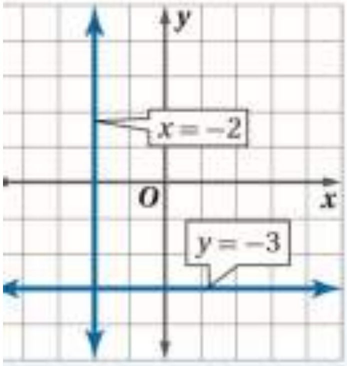
A) (-2,-1) , (0,3)

نوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$

نكتب معادلة المستقيم y = mx + b

Y = 2x + 3 (راجع صفحة ٨٠)

مفهوم أساسي
معادلات المستقيمات الأفقية أو الرأسية



معادلة المستقيم الأفقي هي $y = b$،
حيث b مقطع المحور y له.
مثال: $y = -3$

معادلة المستقيم الرأسي هي $x = a$،
حيث a مقطع المحور x له.
مثال: $x = -2$

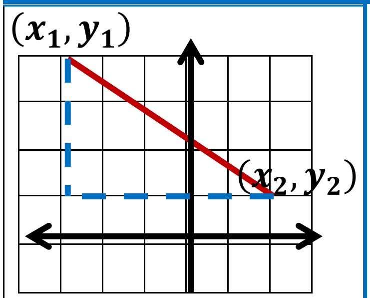
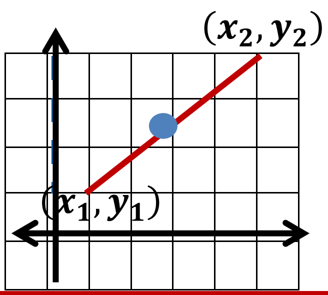
◄ اكتب بصيغة الميل و المقطع معادلة المستقيم العمودي على $y = -3x + 2$ و المار بالنقطة $(4,0)$

ميل المستقيم $3 -$ لذا فإن ميل المستقيم العمودي عليه يساوي $\frac{1}{3}$ (لان ضربهما 1-)

$0 = \frac{1}{3}(4) + b$ بالتعويض بالميل و النقاط

$b = \frac{-4}{3}$

اذا" معادلة المستقيم هي $y = \frac{1}{3}x + (\frac{-4}{3})$

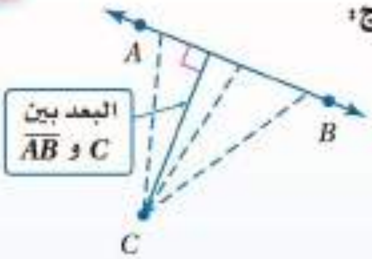
البعد بين النقطتين : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$	$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
قانون نقطة المنتصف لقطعة مستقيمة نهايتاها النقطتان : $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	

البعد بين نقطة ومستقيم :

مفهوم أساسي — **البُعد بين نقطة ومستقيم**

التعبير اللفظي: البعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة.

النموذج:



مثال ◄ يمرر المستقيم L بالنقطتين (3 ,5-) , (6- ,4) أوجد البعد بين المستقيم L و النقطة p=(2,4)

☼نوجد معادلة المستقيم L وذلك بإيجاد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (-5,3) (4,-6)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-6-3}{4-(-5)}=\frac{-9}{9}=-1$$

☼نستعمل ميل المستقيم L والنقطة (4,-6) الواقعة عليه لنجد مقطع المحور y له

Y= mx +b

-6= -1 (4) + b

-6= -4 +b

-2 = b

معادلـة المستقيم L هي y = -x + (-2)

☼اكتب معادلة المستقيم w العمودي على L والمار بالنقطة (2,4)

بما ان ميل Lيساوي 1- فإن ميل w يساوي 1 (لأنه عمودي عليه)

Y = mx + b

4 = 2 + b

b = 2

معادلة المستقيم w هي y = x + 2

☼حل نظام المعادلات (للمستقيمين) لتجد نقطة التقاطع

Y = - x - 2 نجمع المعادلتين

Y = x + 2

2y = 0

Y =0

نوجد قيمة x وذلك بالتعويض بقيمة 0 بدل y في معادلة المستقيم w

0 = x + 2

-2 = x

اذا" نقطة التقاطع q = (-2 , 0)

☼نستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لنجد المسافة بين النقطتين p , q

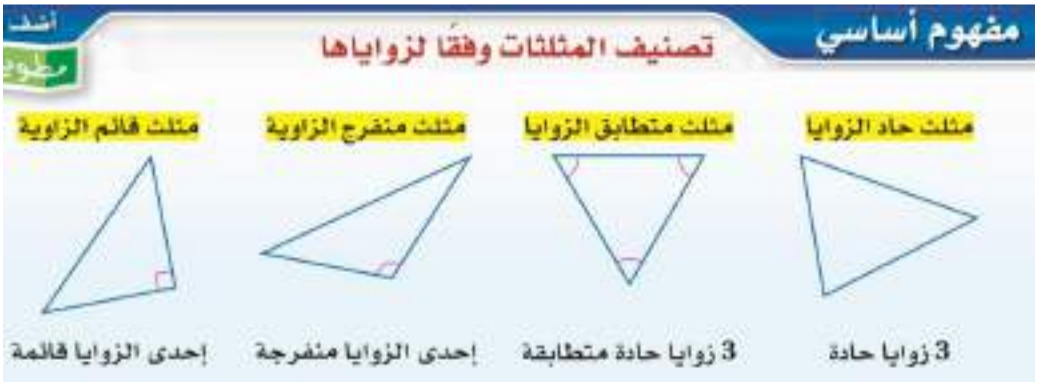
$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

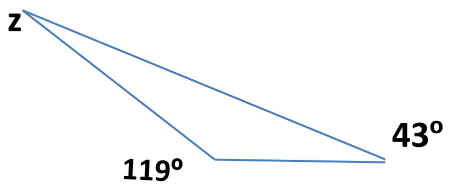
$$d = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-4)^2}$$

$$d = \sqrt{32}$$

البعد بين النقطة والمستقيم هي $\sqrt{32}$

المثلثات : المثلث شكل ذو ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مجموعها 180



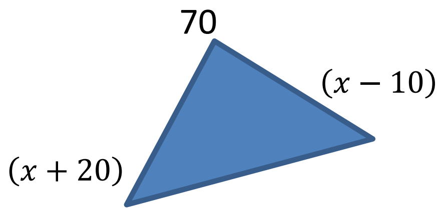


◄ اوجد قياس الزاوية z في المثلث

بما ان مجموع زوايا المثلث 180

اذا " z + 119+43=180

Z=18 ⮌ z=180-162 ⮌ z+162=180



◄ اوجد قيمة x في الشكل :

$$70 + x + 20 + x - 10 = 180$$

$$2x + 80 = 180$$

$$2x = 180 - 80 \quad \rightarrow 2x = 100$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{100}{2} \quad \rightarrow \quad x = 50$$

للتحقق : $70 + (50 + 20) + (50 - 10) = 180$

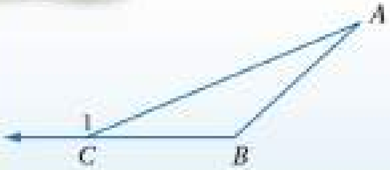
$$180 = 180$$

نظرية 3.2 نظرية الزاوية الخارجية

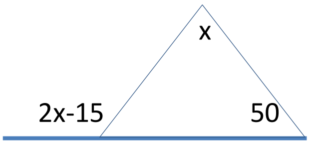
أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسيّ الزاويتين الداخليتين البعيدتين.

مثال: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



اوجد قياس الزاوية الخارجية 2x-15



من النظرية فإن : x+50 = 2x-15

50+15=2x-x → 65=x

بعد معرفة قيمة x نوجد قيمة الزاوية : 2(65)-15=115

تطابق المثلثات :

مفهوم أساسي تعريف المضلعات المتطابقة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يتطابق مضلعان إذا وفقط إذا كانت عناصرهما المتناظرة متطابقة.

مثال:

الزوايا المتناظرة

$\angle A \cong \angle H$ $\angle B \cong \angle J$ $\angle C \cong \angle K$

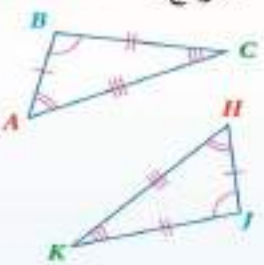
الأضلاع المتناظرة

$\overline{AB} \cong \overline{HJ}$ $\overline{BC} \cong \overline{JK}$ $\overline{CA} \cong \overline{KH}$

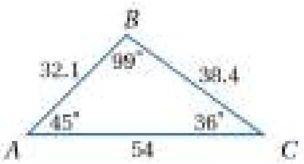
عبارة التطابق

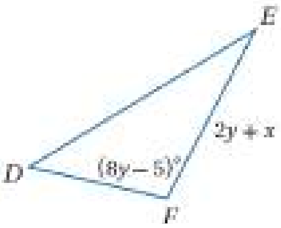
$\triangle ABC \cong \triangle HJK$

نموذج:



في الشكل المجاور اذا كان △ ABC ≅△ DFE فأوجد قيمة: X,Y





$$m\angle F \cong m\angle B \quad \to 8Y - 5 = 99 \quad \to 8Y = 104$$

$$\to Y = 13$$

$$FE \cong BC \quad \to FE = BC \quad \to 2Y + X = 38.4$$

$$2(13) + X = 38.4 \quad \to 26 + X = 38.4$$

$$\to X = 12.4$$

حالات تطابق المثلث :

ملخص المفاهيم — إثبات تطابق المثلثات

SSS

الأزواج الثلاثة من الأضلاع المتناظرة متطابقة.

SAS

تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.

ASA

تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.

AAS

تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة وضلعين غير محصورين.

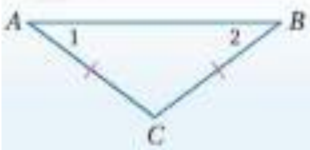
المثلثات متطابقة الضلعين :

نظريات — المثلث المتطابق الضلعين

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

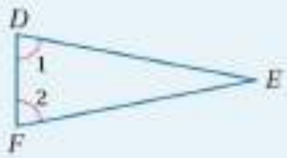
مثال: إذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.



3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$، فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

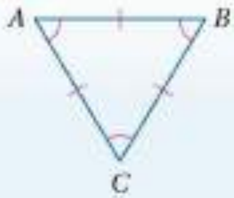


مثلثات متطابقة الاضلاع :

نتيجتان — المثلث المتطابق الأضلاع

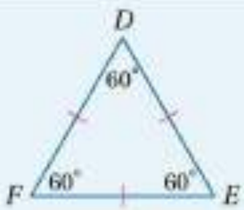
3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: إذا كان $\angle C \cong \angle B \cong \angle A$، فإن $\overline{CA} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$

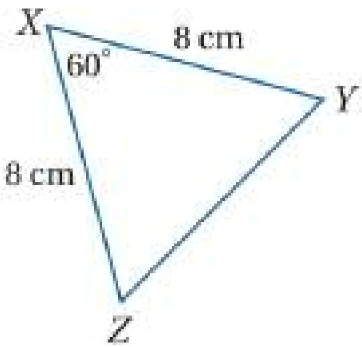


3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{FD} \cong \overline{EF} \cong \overline{DE}$، فإن $m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$.



◄ **اوجد قياس الزاوية y في المثلث التالي $m\angle y$ ؟**



بما أن الضلعين متطابقين فإن الزاويتان

المقابلتان لهما متطابقة $m\angle y = m\angle z$

الرمز $(m\angle)$ يعني قياس الزاوية

$m\angle x + m\angle y + m\angle z = 180$ ،مجموع زوايا المثلث = 180

$60 + 2(m\angle y) = 180$ ، الزاويتان متطابقتان

$2(m\angle y) = 180 - 60$ ، حل المعادلات

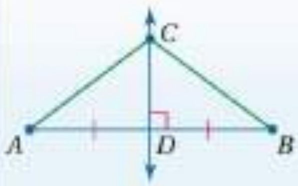
$(m\angle y) = \frac{120}{2}$

$m\angle y = 60$

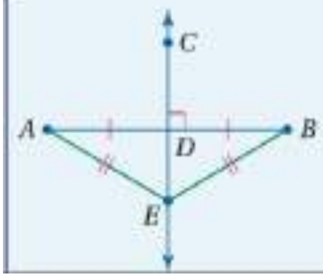
العلاقات في المثلث :

نظريتان — **الأعمدة المنصفة** — أضف إلى مطويتك

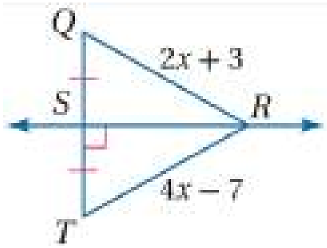
4.1 نظرية العمود المنصف
كلّ نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة.
مثال: إذا كانت $\overleftrightarrow{CD}$ عمودًا منصفًا لـ $\overline{AB}$ ، فإن $AC = BC$.



4.2 عكس نظرية العمود المنصف
كل نقطة على بُعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.
مثال: إذا كان $AE = BE$ ، فإن E تقع على $\overleftrightarrow{CD}$ ، وهو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$.



اوجد قياس RT ؟



SR عمود منصف لـ QT و $RT = RQ$

$$4X - 7 = 2X + 3 \rightarrow 4X - 2X = 3 + 7$$

$$2X = 10 \rightarrow \frac{2X}{2} = \frac{10}{2} \rightarrow X = 5$$

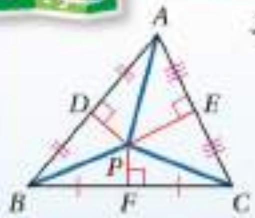
بعد ان علمنا قيمة X نوجد قياس RT : $4X - 7 \rightarrow 4(5) - 7 = 13$

$RT=13$

نظرية 4.3 نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تلتقي الأعمدة المنصّفة لأضلاع مثلث في نقطة تُسمّى مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث، وهي على أبعاد متساوية من الرؤوس.



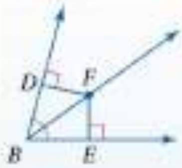
مثال: إذا كانت P مركز الدائرة التي تمر برؤوس $\triangle ABC$ ، فإن $PB = PA = PC$.

نظريتان منصّفات الزوايا

أضف إلى مطويتك

4.4 نظرية منصّف الزاوية

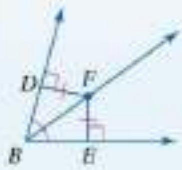
كل نقطة تقع على منصّف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.



مثال: إذا كان $\overrightarrow{BF}$ منصّف لـ $\angle DBE$، وكان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}$, $\overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ فإن $DF = FE$.

4.5 عكس نظرية منصّف الزاوية

كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصّف الزاوية.

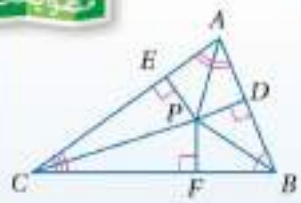


مثال: إذا كان $\overline{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overline{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$. فإن $\overrightarrow{BF}$ ينصّف $\angle DBE$.

نظريّة 4.6 نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتقاطع منصّفات زوايا أي مثلث عند نقطة تُسمّى مركز الدائرة الداخلية للمثلث وهي على أبعاد متساوية من أضلاعه.

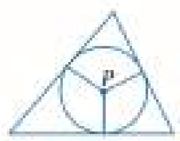


مثال: إذا كانت P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC، فإن $PD = PE = PF$.

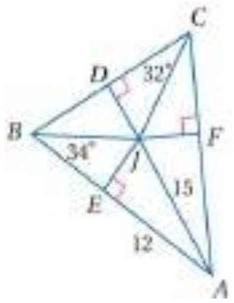
قراءة الرياضيات

مركز الدائرة الداخلية للمثلث

هو مركز الدائرة التي تقطع (تتماس مع) كل ضلع من أضلاع المثلث في نقطة واحدة. ولهذا السبب فإن مركز هذه الدائرة يقع دائمًا داخل المثلث.



اوجد كلا من القياسين الآتيين، إذا كانت J مركز الدائرة الداخلية لـ $\triangle ABC$ ؟



من النظرية السابقة فإن JF=JE ، *لذلك* *نوجد* JE *بنظرية فيثاغورس* .

$$JE^2 + 12^2 = 15^2$$

$$JE^2 = 225 - 144 \rightarrow JE^2 = 81$$

$$\sqrt{JE^2} = \sqrt{81} \quad \rightarrow JE = \pm 9$$

يستحيل ان يكون الطول بالسالب إذاً:

$$JE = 9$$

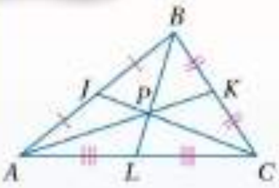
نظرية 4.7 نظرية مركز المثلث

أضف إلى مطويتك

يبعد مركز المثلث عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.

مثال، إذا كانت P مركز $\triangle ABC$ ، فإن

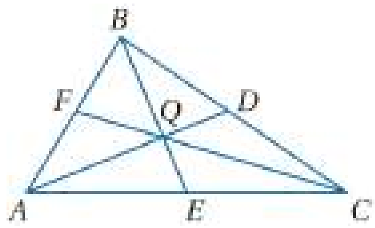
$$AP = \frac{2}{3}AK,\ BP = \frac{2}{3}BL,\ CP = \frac{2}{3}CJ$$



☼ **إذا كانت النقطة Q مركز $\triangle ABC$ ، $BE=9$ فأوجد كلاً من BQ, QE**

$$BQ = \frac{2}{3}BE \ \rightarrow\ \frac{2}{3}9 = 6$$

$$BQ + QE = 9 \ \rightarrow 6 + QE = 9 \ \rightarrow QE = 3$$



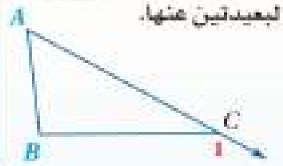
نظرية 4.8 متباينة الزاوية الخارجية

أضف إلى مطويتك

قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أيٍّ من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها.

مثال، $m\angle 1 > m\angle A$

$m\angle 1 > m\angle B$

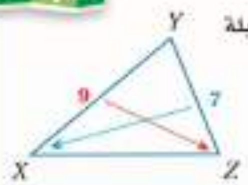


نظريتان العلاقات بين زوايا المثلث وأضلاعه

أضف إلى مطويتك

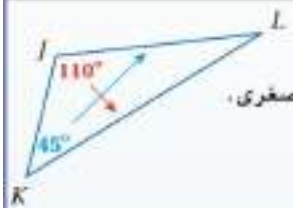
4.9 إذا كان أحد أضلاع مثلث أطول من ضلع آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأقصر.

مثال بما أن $XY > YZ$، فإن $m\angle Z > m\angle X$.



4.10 إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من قياس زاوية أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الكبرى أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى.

مثال بما أن $m\angle J > m\angle K$، فإن $KL > JL$.



نظرية 4.11 نظرية متباينة المثلث

أضف إلى مطويتك

مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

أمثلة $PQ + QR > PR$

$QR + PR > PQ$

$PR + PQ > QR$

مثال : إذا كان طولا ضلعين في مثلث $7cm$, $3cm$ فما اصغر عدد صحيح يمكن ان يمثل طول الضلع الثالث ؟

3cm	4cm	5cm	10cm

يجب ان يكون مجموع أي ضلعين في مثلث اطول من الضلع الثالث ، نفرض انه x

ونكتب المتباينات الثلاث : $7+3>x \quad , \quad 3+x>7 \quad , \quad 7+x>3$

$$10>x \quad , \quad x>4 \quad , \quad x>-4$$

إذاً قيمة x محصورة بين 4 ، 10

$10>x>4$ **إذاً :** $x=5$

ويمكن حلها بالتجريب : بحيث نجمع أي ضلعين هل سيكون اطول من الضلع الثالث ؟

$5+3>7 \quad , \quad 4+3=7 \quad , \quad 3+3<7$

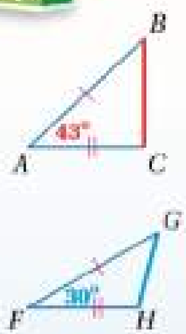
نظريتان المتباينات في مثلثين

أضف إلى مطويتك

4.13 متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني، فإنّ الضلع الثالث في المثلث الأول يكون أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني.

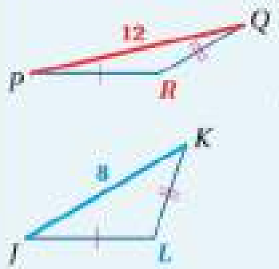
مثال، إذا كان $\overline{AB}\cong\overline{FG}$, $\overline{AC}\cong\overline{FH}$, $m\angle A > m\angle F$ ، فإن $BC > GH$.



4.14 عكس متباينة SAS

إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين مناظرين في مثلث آخر، وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني، فإنّ قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني.

مثال، إذا كان $\overline{PR}\cong\overline{JL}$, $\overline{QR}\cong\overline{KL}$, $PQ > JK$ ، فإن $m\angle R > m\angle L$.



خاص بالمستوى 2

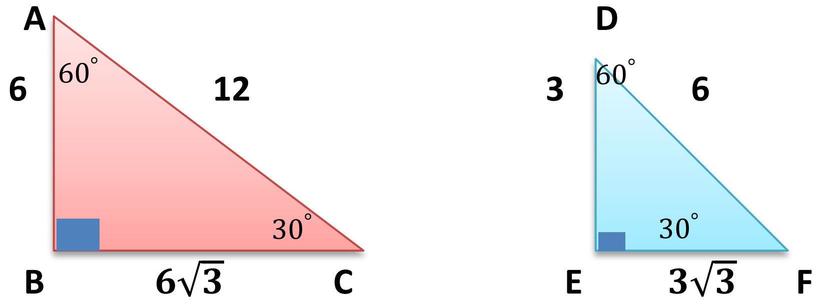
تشابه المثلثات :

نقول عن مثلثين انـهما متشابهان إذا كانت : قياسات زوايا المثلثين المتناظرة متساوية ، وقياسات أضلاعهما المتناظرة متناسبة حيث تسمى النسبة بين الاضلاع (معامل التشابه) .

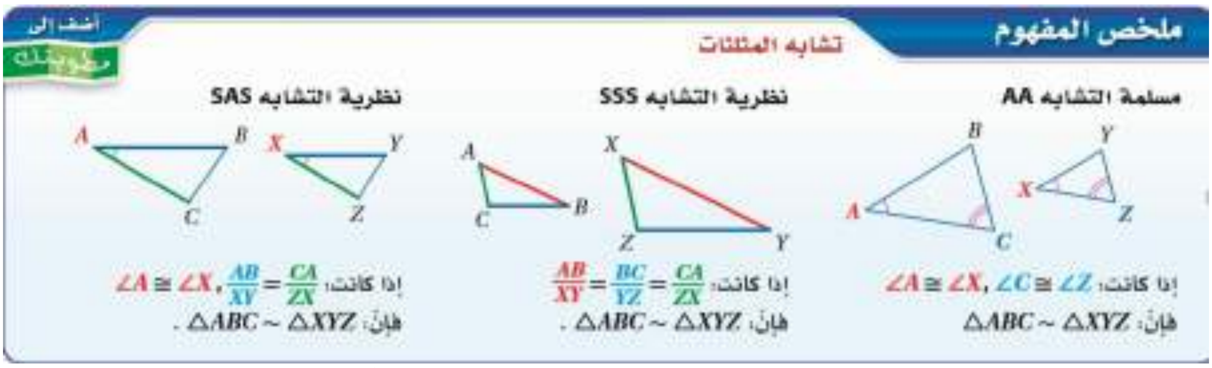
(رمز التشابه ~)   مثال : إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فإن الزوايا المتناظرة متساوية: (m تعني قياس)

$$m\angle A = m\angle D \text{ و } m\angle B = m\angle E \text{ و } m\angle c = m\angle F \ldots$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{2}$$



حالات تشابه المثلثات :



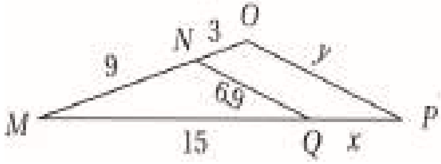
مثال : المثلثان MNQ , MOP في الشكل المجاور متشابهان ، ما قيمة X ؟

12	10	5	4

بما انـهما متشابهان إذاً الاضلاع المتناظرة متناسبة أي ان: $\frac{MN}{MO} = \frac{MQ}{MP}$

وبما ان: MN=9 , MO=12 , MQ=15 , MP=15+X

نجرب الخيارات ونبحث ايهما سيحقق التناسب



نفرض X=12 : $\frac{9}{12} = \frac{15}{15+12} \rightarrow \frac{3}{4} \neq \frac{5}{9}$ خاطئ

نفرض X=4 : $\frac{9}{12} = \frac{15}{15+10} \rightarrow \frac{3}{4} \neq \frac{3}{5}$ خاطئ

نفرض X=5: $\frac{9}{12} = \frac{15}{15+5} \rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ صحيح

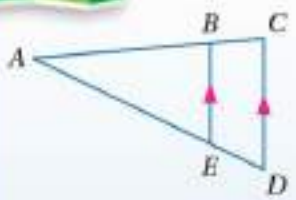
خاص بالمستوى 2

نظرية 2.5

أضف إلى مطويتك

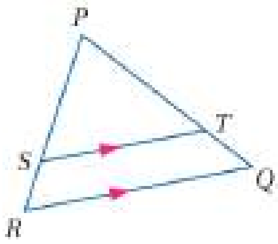
نظرية التناسب في المثلث

إذا وازى مستقيم ضلعًا من أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنّه يقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة.



مثال: إذا كان $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ، فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$.

مثال :إذا كان $\overline{ST} \parallel \overline{RQ}$, $PT = 7.5$, $TQ = 3$, $SR = 2.5$ فأوجد PS



نستعمل نظرية التناسب: $\frac{PS}{SR} = \frac{PT}{TQ} \rightarrow \frac{PS}{2.5} = \frac{7.5}{3}$

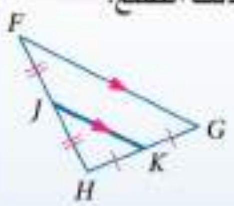
$$PS\,.3 = (2.5)(7.5) \rightarrow 3PS = 18.75 \rightarrow PS = 6.25$$

نظرية 2.7

أضف إلى مطويتك

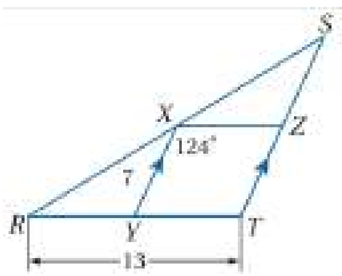
نظرية القطعة المنصفة في المثلث

القطعة المنصفة في المثلث توازي أحد أضلاعه، وطولها يساوي نصف طول ذلك الضلع.



مثال: إذا كانت J, K نقطتي منتصف $\overline{FH}, \overline{HG}$ على الترتيب، فإن: $\overline{JK} \parallel \overline{FG}, JK = \frac{1}{2} FG$.

في المثلث إذا كانت $\overline{XY}, \overline{XZ}$ قطعتين منصفتين ، فأوجد كل قياس مما يأتي:



$A)\ XZ$

$$XZ = \frac{1}{2}RT \rightarrow XZ = \frac{1}{2}13 \rightarrow XZ = 6.5$$

$B)\ ST$

$$XY = \frac{1}{2}ST \rightarrow 7 = \frac{1}{2}ST \rightarrow 14 = ST$$

خاص بالمستوى 2

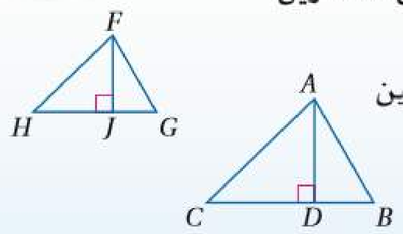
نظريات

أضف إلى مطويتك

قطع مستقيمة خاصّة في المثلثين المتشابهين

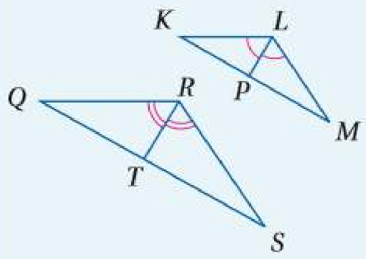
2.8 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولَي كلّ ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$ ، $\overline{AD}, \overline{FJ}$ ارتفاعين فإنّ $\frac{AB}{FG} = \frac{AD}{FJ}$.



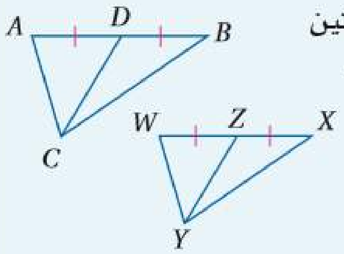
2.9 إذا تشابه مثلثان، فإن النسبة بين طولَي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$ ، $\overline{RT}, \overline{LP}$ قطعتين منصفتين، فإن $\frac{LM}{RS} = \frac{LP}{RT}$.



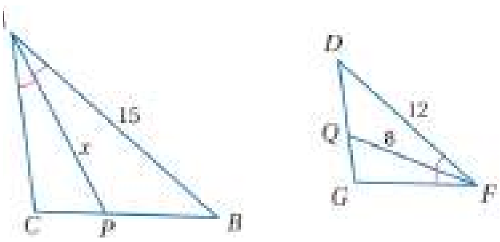
2.10 إذا تشابه مثلثان، فإنّ النسبة بين طولَي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولَي كل ضلعين متناظرين.

مثال: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle WXY$ ، $\overline{YZ}, \overline{CD}$ قطعتين متوسطتين فإنّ $\frac{AB}{WX} = \frac{CD}{YZ}$.



مثال : اذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FDG$ فأوجد قيمة X .

$\overline{AP}, \overline{FQ}$ منصفا زاويتين متناظرين و $\overline{AB}, \overline{FD}$ ضلعان متناظران للمثلثين المتشابهين ABC, FDG :



$$\frac{AP}{FQ} = \frac{AB}{FD} \quad \rightarrow \quad \frac{X}{8} = \frac{15}{12}$$

$$8.15 = X.12 \ \rightarrow 120 = 12X$$

$$\rightarrow \frac{12X}{12} = \frac{120}{12} \quad \rightarrow X = 10$$

نظرية 2.11

أضف إلى مطويتك

منصّف زاوية في مثلث

منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طولَيهما تساوي النسبة بين طولَي الضلعين الآخرين.

مثال: إذا كانت $\overline{JM}$ منصّف زاوية في المثلث $\triangle JKL$

فإنّ $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$ ← القطعتان المشتركتان بالرأس K ← القطعتان المشتركتان بالرأس L

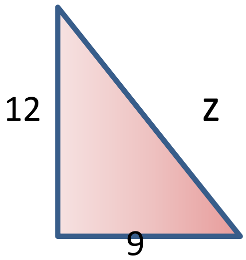
خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي — نظرية فيثاغورس

التعبير اللفظي: إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع الوتر يساوي مجموع مربعي ضلعيه (ساقيه).

الرموز: جـ² = أ² + ب²

مثال : اوجد طول الضلع المجهول في المثلث القائم الزاوية



مربع الوتر=مربع الضلع + مربع الضلع

الوتر هنا هو المجهول

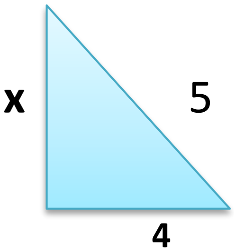
$$z^2 = 12^2 + 9^2$$

$$z^2 = 225$$

بأخذ الجذر للطرفين $z = \pm 15$

طول الجذر يجب ان يكون موجب ،إذا" الحل 15 ...

مثال اوجد طول الضلع المجهول في المثلث القائم الزاوية .



مربع الوتر=مربع الضلع + مربع الضلع

احد الاضلاع مجهول :

$$5^2 = x^2 + 4^2 \quad \to 25 = 16 + x^2$$

$$x^2 = 25 - 16 \to x^2 9 \to \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \to x = 3$$

أي مثلث تنطبق عليه نظرية فيثاغورس فهو قائم الزاوية .

هناك 16 ثلاثية اصغر من 100 :

(3,4,5) ↔ (6,8,10)		(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)
(9,40,41)	(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(16,63,65)
(20,21,29)	(28,45,53)	(33,56,65)	(36,77,85)	(39,80,89)
(48,55,73)	(65,72,97)			

خاص بالمستوى 2

حساب المثلثات :

مفهوم أساسي — جميع الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

الرموز:

$\csc\theta$ (قاطع تمام θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ $\sin\theta$ (جيب θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

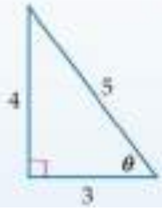
$\sec\theta$ (قاطع θ) $= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ $\cos\theta$ (جيب تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cot\theta$ (ظل تمام θ) $= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$ $\tan\theta$ (ظل θ) $= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

أمثلة:

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cot\theta = \frac{3}{4}$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$



مثال 1 إيجاد قيم الدوال المثلثية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية في C، أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ إذا كان:

طول الضلع المقابل للزاوية θ: $BC = 8$، طول الضلع المجاور للزاوية θ: $AC = 15$، طول الوتر: $AB = 17$

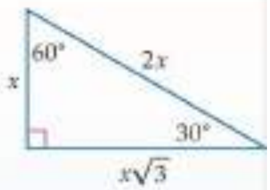
$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{8}{15} \qquad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{15}{17} \qquad \sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{8}{17}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{15}{8} \qquad \sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{17}{15} \qquad \csc\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{17}{8}$$

زوايا تتكرر كثيرا في حساب المثلثات:

مفهوم أساسي — بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

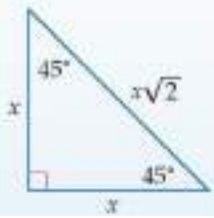
نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $30°-60°-90°$ أن:



$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \sqrt{3}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

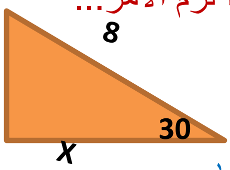
نستنتج من المثلث الذي قياسات زواياه $45°-45°-90°$ أن:



$\tan 45° = 1$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

خاص بالمستوى 2

مـثــال : استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x وقرب الى اقرب جزء من عشرة اذا لزم الامر...



طول الوتر(الضلع المقابل للزاوية القائمة) يساوي 8 ، والمجهول هو الضلع المجاور للزاوية 30º نستعمل دالة جيب التمام لإيجاد المجهول

$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \rightarrow \cos 30^{\circ} = \frac{x}{8} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8} \rightarrow x = 6.9 \rightarrow X = 7$$

 # طريقة مميزة لحفظ مقدار الزاوية المثلثية $\sin x, \cos x, \tan x$:

$$0^{\circ} \quad 30^{\circ} \quad 45^{\circ} \quad 60^{\circ} \quad 90^{\circ}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} \sin x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cos x & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{6}{c}{2} \end{array}$$

$$\sin 30 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

$$\tan 30 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

، من المتطابقات المثلثية : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \cos 60 = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

ملاحظة :عند قسمة كسرين ، نحولها عملية ضرب

حده الأول البسط ، وحده الثاني مقلوب المقام

 # للحفظ المباشر :

الزاوية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	....
180	0	-1	0

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي: معكوس النسب المثلثية

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x، فإن: معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $\sin^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $\cos^{-1} x = m\angle A$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x، فإن: معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $\tan^{-1} x = m\angle A$.

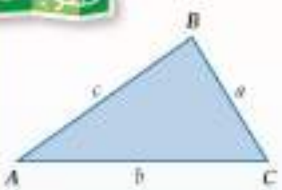
مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}\sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

مساحة المثلث غير القائم باستخدام الدوال المثلثية :

مفهوم أساسي: مساحة المثلث

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

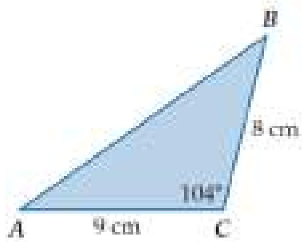


الرموز: المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$ ، المساحة $= \frac{1}{2} ac \sin B$ ، المساحة $= \frac{1}{2} ab \sin C$

مثال 1 إيجاد مساحة مثلث

أوجد مساحة $\triangle ABC$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

$\triangle ABC$ فيه: $a = 8, b = 9, C = 104°$.



المساحة $= \frac{1}{2} ab \sin C$ صيغة مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(8)(9) \sin 104°$ بالتعويض

≈ 34.9 بالتبسيط

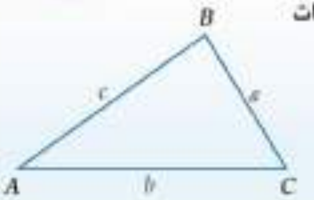
إذن المساحة تساوي $34.9\, cm^2$ تقريباً

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي

قانون الجيوب

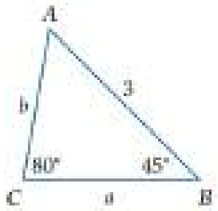
أضف إلى مطويتك



إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

مثال 2 حل مثلث بمعلومية قياسي زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه



حُلَّ $\triangle ABC$. قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم.

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$$m\angle A = 180 - (80 + 45) = 55°$$

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد كلٍّ من الطولين: a, b. اكتب معادلة لإيجاد قيمة كلٍّ منهما.

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$	قانون الجيوب	$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
$\frac{\sin 55°}{a} = \frac{\sin 80°}{3}$	بالتعويض	$\frac{\sin 45°}{b} = \frac{\sin 80°}{3}$
$a = \frac{3 \sin 55°}{\sin 80°}$	بالحل بالنسبة لكل متغير	$b = \frac{3 \sin 45°}{\sin 80°}$
$a \approx 2.5$	باستعمال الآلة الحاسبة	$b \approx 2.2$

إذن، $A = 55°, a \approx 2.5, b \approx 2.2$.

مفهوم أساسي

قانون جيوب التمام

أضف إلى مطويتك

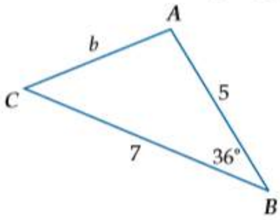
إذا كانت أضلاع $\triangle ABC$ التي أطوالها a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

خاص بالمستوى 2

مثال 1 حل مثلث بمعلومية طولي ضلعين فيه وقياس الزاوية المحصورة بينهما

حُلّ $\triangle ABC$. مقربًا طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة، وقياسَي الزاويتين إلى أقرب درجة.



الخطوة 1: استعمل قانون جيوب التمام لإيجاد طول الضلع الثالث.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ قانون جيوب التمام

$b^2 = 7^2 + 5^2 - 2(7)(5)\cos 36°$ $a = 7, c = 5, B = 36°$

$b^2 \approx 17.4$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

$b \approx 4.2$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

الخطوة 2: استعمل قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية A.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ قانون جيوب التمام

$7^2 = 4.2^2 + 5^2 - 2(4.2)(5)\cos A$ $a = 7, b = 4.2, c = 5$

$7^2 - 4.2^2 - 5^2 = -2(4.2)(5)\cos A$ بطرح 4.2^2 و 5^2 من كلا الطرفين

$\dfrac{7^2 - 4.2^2 - 5^2}{-2(4.2)(5)} = \cos A$ بقسمة كلا الطرفين على $-2(4.2)(5)$

$-0.1514 \approx \cos A$ باستعمال الآلة الحاسبة للتبسيط

$99° \approx A$ بإيجاد قيمة $\cos^{-1} -0.1514$

الخطوة 3: أوجد قياس الزاوية الثالثة.

$m\angle C \approx 180 - (36 + 99) \approx 45$

إذن: $b \approx 4.2, A \approx 99°, C \approx 45°$

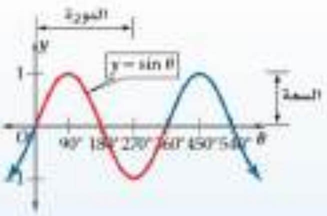
ملخص المفهوم: حل المثلثات غير القائمة الزاوية

أضف إلى مطويتك

إذا أعطيت	أبدأ الحل باستعمال
قياسا زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

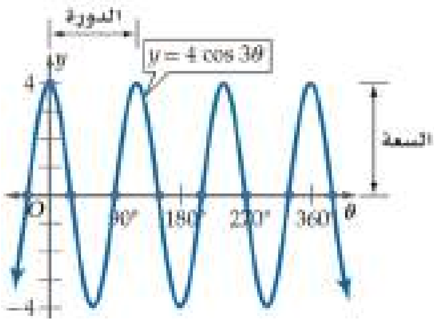
مفهوم أساسي: دالتا الجيب وجيب التمام

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	360°	360°

مثال 1 إيجاد السعة وطول الدورة

أوجد السعة وطول الدورة للدالة $y = 4 \cos 3\theta$.



السعة: من الرسم نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة يساوي 4 $= \frac{4-(-4)}{2}$ أو 4 $|a| = |4| = 4$

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|3|} = 120°$

من الرسم يكرر الرسم نفسه كل $120°$

تحقق من فهمك

مثال 2 تمثيل دالتي الجيب وجيب التمام بيانيًا

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $y = 2 \sin \theta$

أوجد السعة، وطول الدورة ونقاط التقاطع مع المحور θ حيث: $a = 2 , b = 1$.

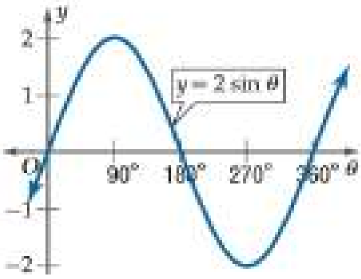
السعة: $|a| = |2| = 2$ ← المنحنى يتسع رأسيًا بحيث تكون القيمة العظمى 2 والقيمة الصغرى -2 .

طول الدورة: $\frac{360°}{|b|} = \frac{360°}{|1|} = 360°$ ← دورة واحدة طولها $360°$.

نقاط التقاطع مع المحور θ هي: $(0, 0)$

$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{b}, 0\right) = (180°, 0)$

$\left(\frac{360°}{b}, 0\right) = (360°, 0)$

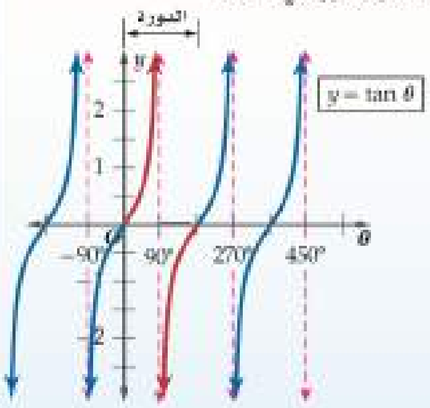


مفهوم أساسي دالة الظل

أضف إلى مطويتك

الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan \theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90° + 180° n, n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$180°$

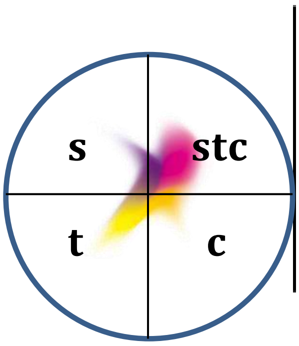
التمثيل البياني للدالة



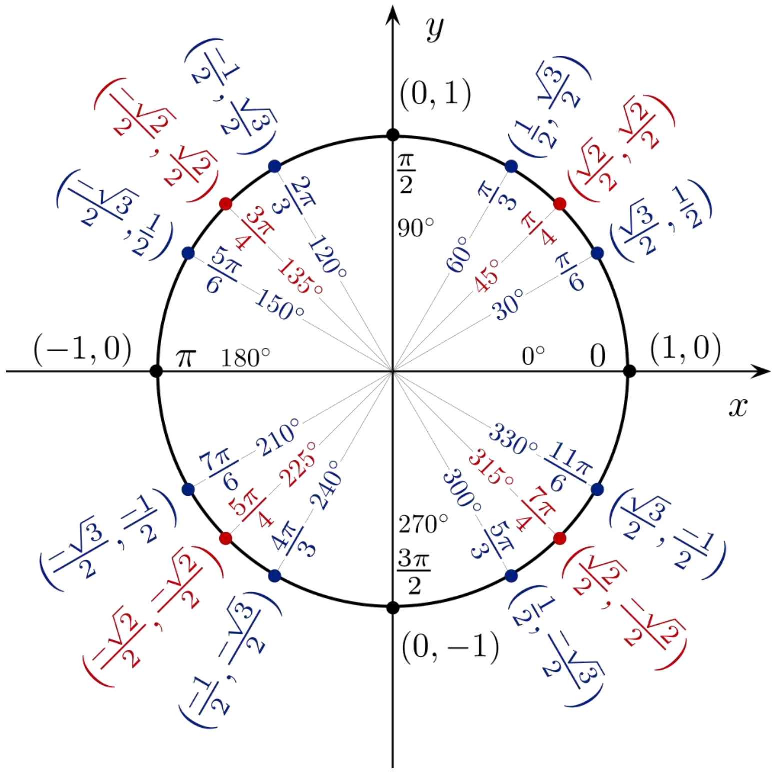
خاص بالمستوى 2

قياس الزوايا بالدرجات والراديان :

مقدار الزوايا و مواقعها ورمزها قياسيا و ب الراديان ، وكل زوج مرتب يحدد مقياس الزوايا المثلثية $(\cos x, \sin x)$



اشارات الزوايا المثلثية : (الربع الأول الكل موجب ، الثاني sinموجب، الثالث tan موجب ، الرابع cos)



مفهوم أساسي — التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

أضف إلى مطويتك

من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان	من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات
للتحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان، اضرب قياس الزاوية بالدرجات في $\frac{\pi \text{ rad}}{180°}$	للتحويل من القياس بالراديان إلى القياس بالدرجات، اضرب قياس الزاوية بالراديان في $\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

مثال 4 التحويل من القياس بالدرجات إلى القياس بالراديان والعكس

حوّل قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان، والمكتوبة بالراديان إلى درجات:

a) $-30°$

$$-30° = -30° \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180°}$$
$$= \frac{-30\pi}{180} = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

b) $\frac{5\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\cancel{\text{rad}} \cdot \frac{180°}{\cancel{\pi \text{ rad}}}$$
$$= \frac{900°}{2} = 450°$$

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin \theta = \dfrac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc \theta = \dfrac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$

$\cos \theta = \dfrac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$

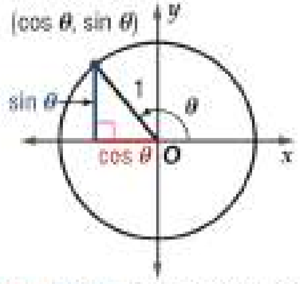
$\tan \theta = \dfrac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \dfrac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$



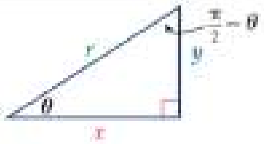
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$



$\sin \theta = \dfrac{y}{r} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

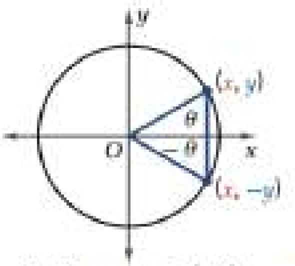
$\tan \theta = \dfrac{y}{x} = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$



$\sin \theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos \theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

مفهوم أساسي — متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

- $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق

- $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

خاص بالمستوى 2

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ و $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ، وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin 105° = \sin(60°+45°) \qquad 105°=60°+45°$$

$$= \sin 60°\cos 45° + \cos 60°\sin 45° \qquad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{عوض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{بسط}$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \qquad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \sin\theta = \frac{2}{3}$$

$$\cos^2\theta = \frac{5}{9} \qquad \text{اطرح}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \text{خذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \text{متطابقة ضعف الزاوية}$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \qquad \sin\theta=\frac{2}{3},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9} \qquad \text{اضرب}$$

حل المعادلات المثلثية :

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$	المعادلة الأصلية
$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$	حلّل
$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$	خاصية الضرب الصفري
$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$	
$\theta = 30°$ أو $150°$	الزاوية المرجعية للزاوية

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$	المعادلة الأصلية
$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$	حلّل
$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$	خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

☆

الحلول الدخيلة : بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

خاص بالمستوى 2

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلّل

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan^2\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي: $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

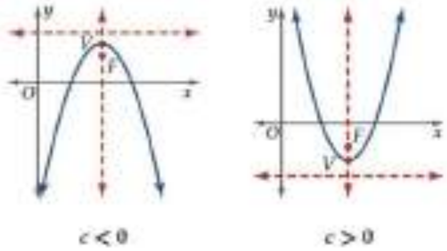
خاص بالمستوى 2

القطوع المخروطية :

الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C

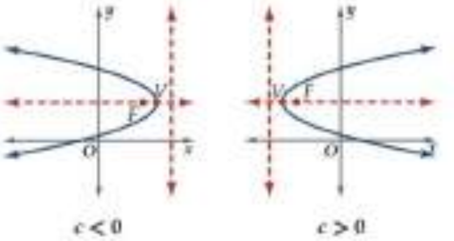
مفهوم أساسي خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x - h)^2 = 4c(y - k)$



الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k + c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y - k)^2 = 4c(x - h)$



الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h + c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

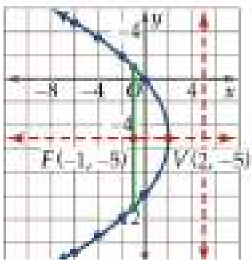
المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ؛ لذا فإن $h = 2 , k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ:

الرأس: $(2, -5)$ (h, k) الدليل: $x = 5$ $x = h - c$

البؤرة: $(-1, -5)$ $(h + c, k)$ محور التماثل: $y = -5$ $y = k$

طول الوتر البؤري: 12 $|4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله موازٍ لأحد محوري الإحداثيات:
– مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.
– مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.
– مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.
– مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

خاص بالمستوى 2

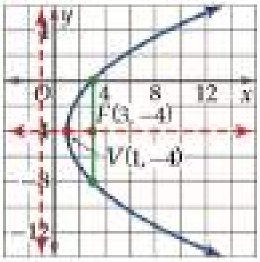
مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$ ، وتكون قيمة c هي $2 = 1 - 3$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .



الصورة القياسية	$(y - k)^2 = 4c(x - h)$
$c = 2, h = 1, k = -4$	$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$
بسّط	$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

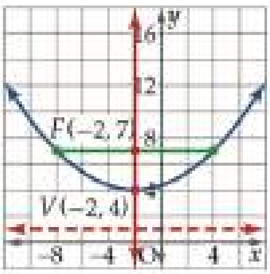
مثّل بيانيًا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

معادلة الدليل	$y = k - c$
$y = 1, k = 4$	$1 = 4 - c$
اطرح 4 من الطرفين	$-3 = -c$
اقسم كلا الطرفين على -1 .	$3 = c$



عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

الصورة القياسية	$(x - h)^2 = 4c(y - k)$
$h = -2, k = 4, c = 3$	$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$
بسّط	$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$

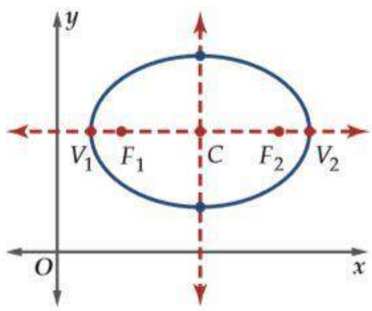
طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a =$

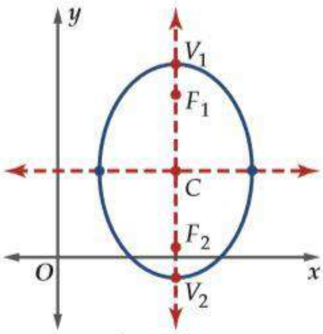
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

طول البعد البؤري: $2C$

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

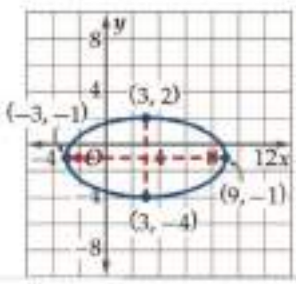
a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

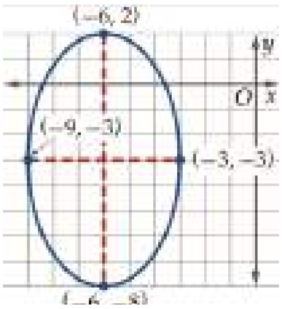
الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(-3, -1)$ و $(9, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, -4)$ و $(3, 2)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y = -1$، وطوله 12	$y = k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x = 3$، وطوله 6	$x = h$، طول المحور الأصغر $2b$



عيِّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

خاص بالمستوى 2

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a, b.

نصف طول المحور الأكبر: $\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$

نصف طول المحور الأصغر: $\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (-6, -3)$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

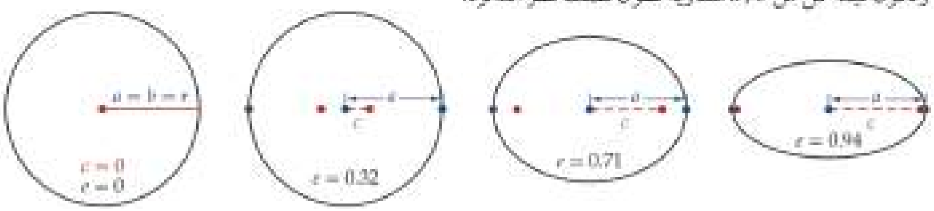
$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . وتقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

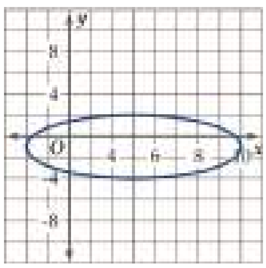
تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي c ، e تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a ، b مساوية لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .



$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $a^2 = 100, b^2 = 9$

$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $a = 10, c = \sqrt{91}$

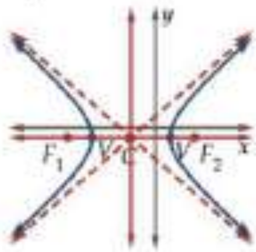
الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.

خاص بالمستوى 2

مفهوم أساسي خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

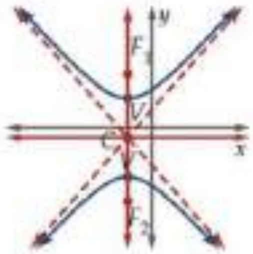
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h=-1,\ k=-2,\ a=\sqrt{9}=3,\ b=\sqrt{16}=4,\ c=\sqrt{9+16}=5$$

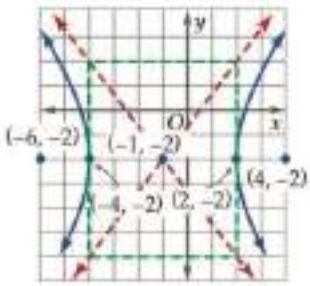
استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$

خطا التقارب: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$ $\quad y+2=\frac{4}{3}(x+1)$ ، $y+2=-\frac{4}{3}(x+1)$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \quad ، \quad y=-\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a=6$، والبعد الآخر $2b=8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c=10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



خاص بالمستوى 2

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

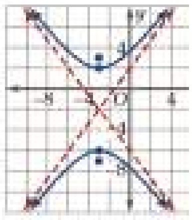
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = -2x + 12$, $y = 2x - 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

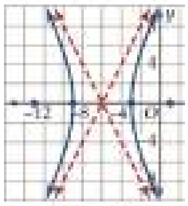
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$



الشكل 4.3.2

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ $a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بسّط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ $a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

خاص بالمستوى 2

الدائـــــرة :

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $x^2 + y^2 = r^2$

مفهوم أساسي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 4^2$ $(h, k) = (-1, 2),\ r = \frac{8}{2} = 4$

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$ بسّط

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$ ، $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2}\right)$ $(x_1, y_1) = (7, 6),\ (x_2, y_2) = (-1, -8)$

$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$ اجمع

$= (3, -1)$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغة المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{(3-7)^2 + (-1-6)^2}$ $(x_1, y_1) = (7, 6),\ (x_2, y_2) = (3, -1)$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$ اطرح

$= \sqrt{65}$ بسّط

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 65$.

خاص بالمستوى 2

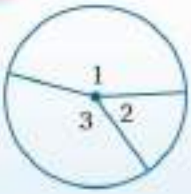
قياس الزوايا و الأقواس :

الزاوية المركزية في الدائرة هي زاوية يقع رأسها في المركز ، وضلعاها نصفا قطرين في الدائرة .

مفهوم أساسي مجموع قياسات الزوايا المركزية

التعبير اللفظي: مجموع قياسات الزوايا المركزية في الدائرة، والتي لا تحوي نقاطًا داخلية مشتركة يساوي °360 .

مثال: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$



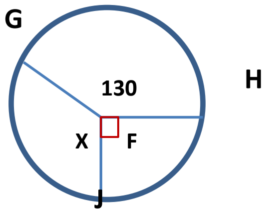
اوجد قيمة x في الشكل المجاور ؟

$$m\angle GFH + m\angle HFG + m\angle\angle GFJ = 360$$

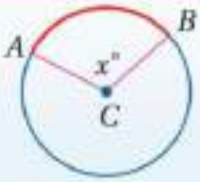
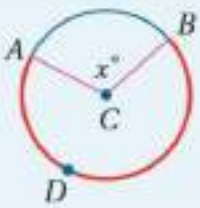
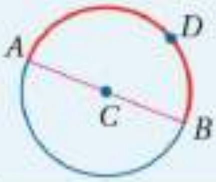
130 + 90 + X = 360 (يوجد زاوية قائمة)

220 + X = 360

X= 140

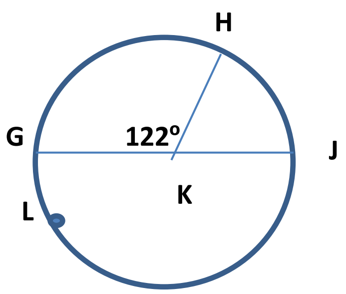


اقــواس الدائــرة

القوس	قياسه	
القوس الأصغر هو القوس الأقصر الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يقل قياس القوس الأصغر عن °180 ، ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له. $m\widehat{AB} = m\angle ACB = x^\circ$	
القوس الأكبر هو القوس الأطول الذي يصل بين نقطتين على الدائرة.	يزيد قياس القوس الأكبر على °180، ويساوي °360 مطروحًا منه قياس القوس الأصغر الذي يصل بين النقطتين نفسيهما. $m\widehat{ADB} = 360^\circ - m\widehat{AB} = 360^\circ - x^\circ$	
نصف الدائرة هي قوس تقع نقطتا طرفيه على قطر الدائرة.	قياس نصف الدائرة يساوي °180 $m\widehat{ADB} = 180^\circ$	

خاص بالمستوى 2

$\overline{GJ}$ قطر في $\odot K$ ($\odot$رمز الدائرة) ، حدد ما اذا كان كل قوس من الأقواس التالية قوسا اكبر او اصغر او نصف دائرة ثم اوجد قياسه .



◄ $\widehat{GH}$

قوس اصغر وقياسه يساوي قياس الزاوية المركزية

المقابلة له = 122°

◄ $\widehat{GLH}$

هو القوس الاكبر وبما ان القوس الاصغر معلوم قياسه نستطيع استنتاج قياس القوس الاكبر

$$m\,\widehat{GHL} = 360^\circ - m\,\widehat{GH}$$

$$= 360 - 122 = 238^\circ$$

◄ $\widehat{GLJ}$

هو نصف دائرة ، إذاً" يساوي : 180°

طول القوس: طول القوس هو المسافة على الدائرة بين نقطتي طرفيه، ويُقاس بوحدات الطول، وبما أن القوس جزء من الدائرة، فإن طوله جزءٌ من محيطها.

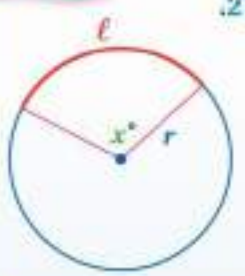
مفهوم أساسي طول القوس

أضف إلى مطويتك

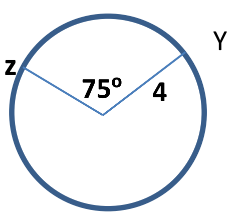
التعبير اللفظي: إذا كان طول القوس يساوي ℓ ومحيط الدائرة يساوي $2\pi r$، وقياس القوس بالدرجات يساوي $x°$ فإن نسبة طول القوس إلى محيط الدائرة يساوي نسبة قياس القوس بالدرجات إلى 360°

الرموز: $\dfrac{\ell}{2\pi r} = \dfrac{x°}{360°}$

أي أن: $\ell = \dfrac{x°}{360°} \cdot 2\pi r$



اوجد طول $\widehat{ZY}$ ؟



$$\ell = \frac{X}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$= \frac{75°}{360°} \cdot 2\pi 4 \approx 5.24$$

خاص بالمستوى 2

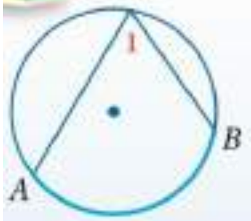
الزوايا المحيطية :

هي زاوية يقع رأسها على الدائرة و يحتوي ضلعاها على وترين في الدائرة .

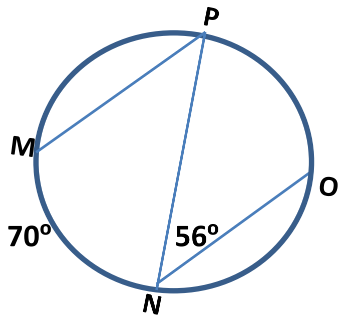
نظرية 4.6 نظرية الزاوية المحيطية

التعبير اللفظي: قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.

مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$, $m\widehat{AB} = 2m\angle 1$



مثال : اوجد القياسين الآتيين مستعملا الشكل المجاور :



1) $m\angle p$

$= \frac{1}{2} m\,\widehat{MN} = \frac{1}{2}(70°) = 35°$

2) $m\,\widehat{po}$

$= = 2m\angle N$

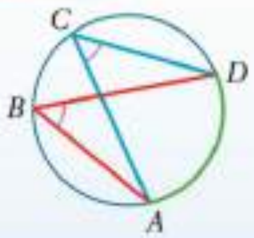
= 2 (56°) = 112°

نظرية 4.7

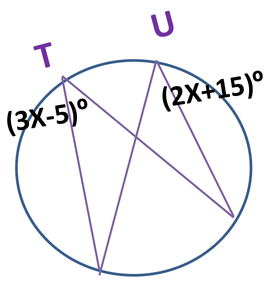
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا قابلت زاويتان محيطيّتان في دائرة القوس نفسه أو قوسين متطابقين، فإن الزاويتين تكونان متطابقتين.

مثال: $\angle B$, $\angle C$ تقابلان $\widehat{AD}$ ، إذن $\angle B \cong \angle C$.



اوجد $m\angle T$ مستعملا الشكل المجاور :



$m\angle T = m\angle U$

3X-5 = 2X +15

X = 20

إذاً" $m\angle T = 3(20) - 5 = 55°$

خاص بالمستوى 2

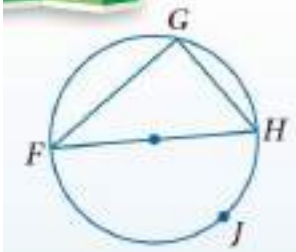
زوايا المضلعات المحاطة بدائرة :

النظرية 4.8

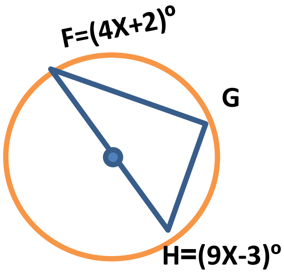
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تقابل الزاوية المحيطية في مثلث قطرًا أو نصف دائرة، إذا وفقط إذا كانت هذه الزاوية قائمة.

مثال: إذا كانت $\widehat{FJH}$ نصف دائرة، فإن $m\angle G = 90°$.
إذا كان $m\angle G = 90°$، فإن $\widehat{FJH}$ هي نصف دائرة، ويكون $\overline{FH}$ قطرًا فيها.



مثال : اوجد $m\angle F$ مستعملا" الشكل المجاور.



المثلث قائم الزاوية لأن الزاوية G محيطية تقابل نصف دائرة.

$$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180°$$

$$(4x+2)° + 90° + (9x-3)° = 180°$$

$$(13x)° + 89° = 180°$$

$$13x = 91 \quad \rightarrow \quad x = 7$$

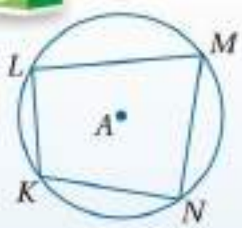
إذا" : $m\angle F = (4(7)+2)° = 30°$

نظرية 4.9

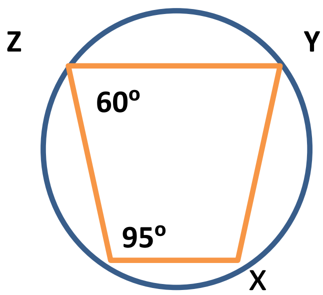
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كان الشكل الرباعي محاطًا بدائرة، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

مثال: إذا كان الشكل الرباعي $KLMN$ محاطًا بـ $\odot A$، فإن $\angle L, \angle N$ متكاملتان و $\angle K, \angle M$ متكاملتان أيضًا.



مثال: اوجد $m\angle Y$, $m\angle X$



شكل رباعي في دائرة إذا" كل زاويتين متقابلتين متكاملتين.

$$m\angle x + 60° = 180 \rightarrow m\angle x = 120°$$

$$m\angle y + 95° = 180° \quad \rightarrow \quad m\angle y = 85°$$

خاص بالمستوى 2

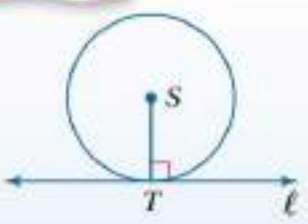
مماس الدائرة :

النظرية 4.10

أضف إلى مطويتك

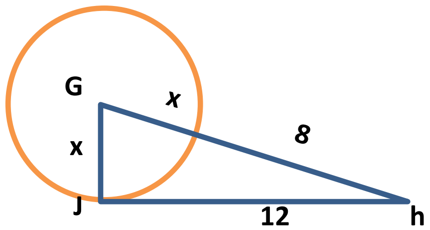
التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماسًا لدائرة في المستوى نفسه، إذا وفقط إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نقطة التماس.

مثال: يكون المستقيم ℓ مماسًا لـ $\odot S$، إذا وفقط إذا كان $\overline{ST} \perp \ell$.



$\overline{Jh}$ مماس للدائرة G عند J اوجد قيمة X .

وفقا للنظرية السابقة يكون $\overline{Jh} \perp \overline{GJ}$ ، إذا" المثلث قائم الزاوية .



$GJ^2 + Jh^2 = Gh^2$ فيثاغورس

$x^2 + 144 = (x+8)^2$

$x^2 + 144 = x^2 + 16x + 64$

80 = 16x

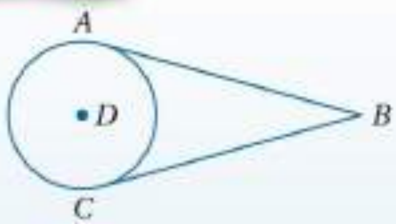
X = 5

نظرية 4.11

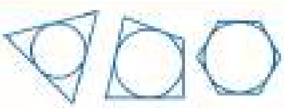
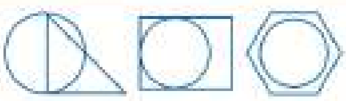
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا رُسمت قطعتان مستقيمتان مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان.

مثال: إذا كان $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ مماسان لـ $\odot D$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



المضلّعات المحيطة بدائرة: يُحيط المضلّع بالدائرة، إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماسًا للدائرة

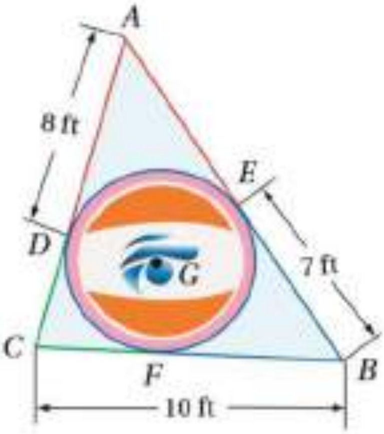
مضلعات محيطة بدائرة	مضلعات ليست محيطة بدائرة
	

يمكنك استعمال النظرية 4.11، لإيجاد قياسات مجهولة في المضلّعات المحيطة بدائرة.

تنبيه !

تحديد المضلعات المحيطة بدائرة، إذا مست الدائرة بعض أضلاع المضلع ولم تمسها جميعها فلا يُعدُّ المضلع محيطًا بالدائرة. وهذا ما يتضح في الجدول.

خاص بالمستوى 2



تصميم مصور: صمّم منصور الشعار المبيّن في الشكل المجاور، إذا كان $\triangle ABC$ محيطًا بالدائرة G، فأوجد محيطه.

الخطوة 1: أوجد القياسات المجهولة.

بما أن $\triangle ABC$ يحيط بالدائرة G، فإن $\overline{AE}, \overline{AD}$ مماسّان للدائرة $\odot G$، وكذلك $\overline{BE}, \overline{BF}$ و $\overline{CF}, \overline{CD}$ مماسات أيضًا.

إذن: $\overline{AE} \cong \overline{AD}, \overline{BF} \cong \overline{BE}, \overline{CF} \cong \overline{CD}$

لذا فإن: $AE = AD = 8$ ft, $BF = BE = 7$ ft.

وبتطبيق مسلّمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن $CF + FB = CB$

إذن: $CF = CB - FB = 10 - 7 = 3$ ft؛ لذا فإن: $CD = CF = 3$ ft.

الخطوة 2: أوجد محيط $\triangle ABC$.

المحيط يساوي:

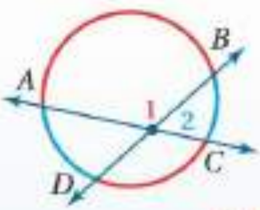
$$AE + EB + BC + CD + DA = 8 + 7 + 10 + 3 + 8 = 36$$

إذن محيط $\triangle ABC$ يساوي 36ft.

نظرية 4.12

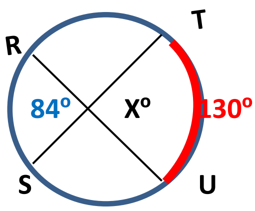
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو وتران داخل دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوّنة من التقاطع يساوي نصف مجموع قياسَي القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.



مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{CD})$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\widehat{DA} + m\widehat{BC})$

اوجد قيمة x :



$$m\angle x° = \frac{1}{2}(m\angle RS + m\angle TU)$$

$$x° = \frac{1}{2}(84° + 130°)$$

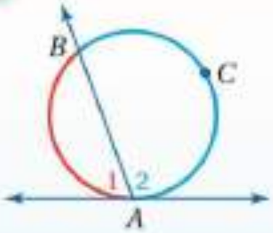
$$x° = 107°$$

خاص بالمستوى 2

نظرية 4.13 نظرية الزاوية المماسية

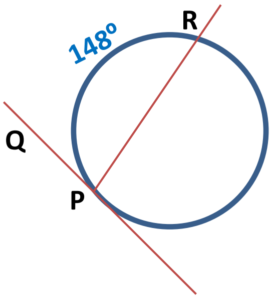
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا تقاطع مماس وقاطع عند نقطة التماس، فإن قياس كل زاوية متكونة من التقاطع يساوي نصف قياس القوس المقابل لها.



مثال: $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$ و $m\angle 2 = \frac{1}{2} m\widehat{ACB}$

اوجد قياس الزاوية الاتية :



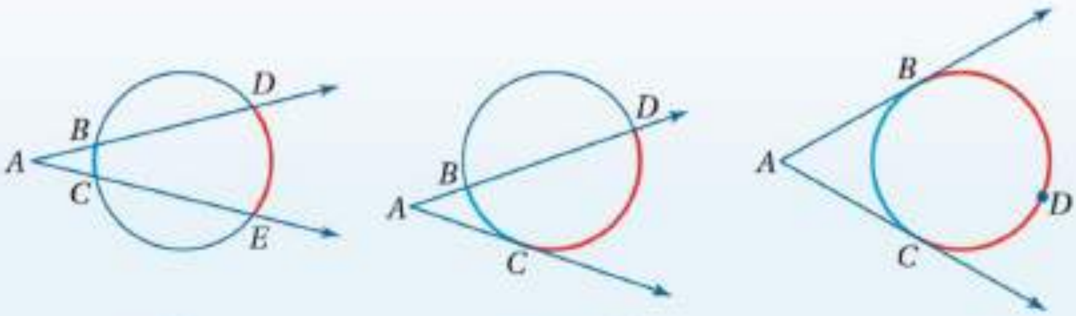
$m\angle QPR$

$= \frac{1}{2} m\widehat{PR}$

$= \frac{1}{2}(148°) = 74°$

التعبير اللفظي: إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان في نقطة خارج دائرة، فإن قياس الزاوية المتكوِّنة يساوي نصف الفرق الموجب بين قياسَي القوسين المقابلين لها.

أمثلة:



مماسان	قاطع ومماس	قاطعان
$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{BDC} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DC} - m\widehat{BC})$	$m\angle A = \frac{1}{2}(m\widehat{DE} - m\widehat{BC})$

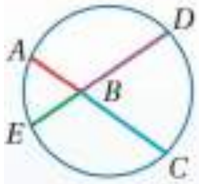
خاص بالمستوى 2

نظرية 4.15
أضف إلى مطويتك

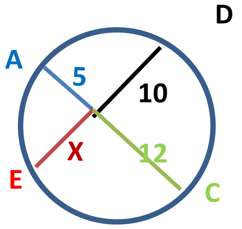
نظرية قطع الوتر

التعبير اللفظي: إذا تقاطع وتران في دائرة، فإن حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الأول يساوي حاصل ضرب طولي جزأي الوتر الثاني.

مثال: $AB \cdot BC = DB \cdot BE$



اوجد قيمة X :



AB . BC = EB . BD

5 . 12 = X .10

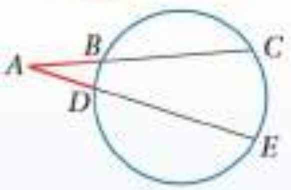
60 = 10X → X=6

نظرية 4.16
أضف إلى مطويتك

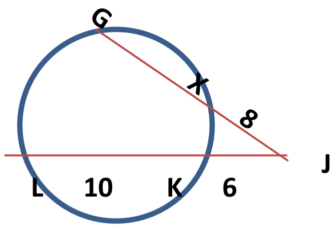
نظرية القاطع

التعبير اللفظي: إذا رُسم قاطعان لدائرة من نقطة خارجها، فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه، يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

مثال: $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



اوجد قيمة X :



JG . JH = JL . JK

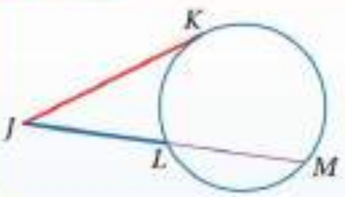
(X+8) 8 = (10+6)6

8X+64=96 → X = 4

نظرية 4.17
أضف إلى مطويتك

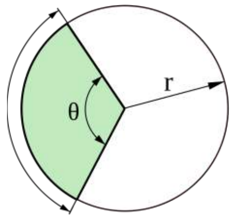
التعبير اللفظي: إذا رُسم مماسٌ وقاطع لدائرة من نقطة خارجها، فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.

مثال: $JK^2 = JL \cdot JM$



خاص بالمستوى 2

القطاع الدائري: هو جزء من دائرة يحده نصفا قطر وقوس



مساحته : $\left(\frac{r^2}{2}\,\theta\right)$ بمعلومية نصف القطر والزاوية با لراديان

$\left(\frac{L}{2}\,r\right)$ بمعلومية نصف القطر و طول القوس

المحيط : $(2r+L)$

☼ مثال : اوجد مساحة قطاع دائري نصف قطر دائرته 8 سم ومحيطه 25 سم

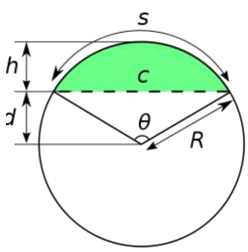
محيط القطاع: $(2\times 8)+L=25 \quad \rightarrow \quad L=25-16 \ \rightarrow L=9$

مساحة القطاع: $\frac{L}{2}r \quad \rightarrow \quad \frac{9}{2}\times 8=36$

مثال : قطاع دائري طول نصف قطر دائرته 15سم ومساحته 270سم^2 اوجد طول القوس:

$$\frac{L}{2}\,r=270 \quad \rightarrow \quad \frac{15L}{2}=270 \ \rightarrow \mathrm{L}=36$$

القطعة الدائرية : هي جزء من الدائرة يفصلها عن بقية الدائرة مستقيم قاطع أو وتر ,
تكون القطعة الدائرية هي المساحة بين الوتر وقوس الدائرة بدون مركز الدائرة



المساحة : $\frac{R^2}{2}(\theta_1-\sin\theta_2)$ ، حيث θ_1 الزاوية بالدائري ، θ_2 بالدرجات

نصف القطر: $R=h+d$ ، طول القوس: $s=R\theta_1$

عرض القطعة الدائرية: $c=R\sqrt{2-2\cos\theta}$

مثال: اوجد مساحة قطعة دائرية طول نق 8cm وقياس زاويتها 135.

معطى قياس الزاوية بالدرجات ، ونحتاج ايضا" بالراديان: $\frac{135\times\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{R^2}{2}(\theta_1-\sin\theta_2)=\frac{8^2}{2}\left(\frac{3\pi}{4}-\sin 135\right)=53cm^2$$

مثال:اوجد مساحة القطعة الدائرية طول نق 14cm وطول قوسها 22

لايجاد المساحة نحتاج ل نق و للزاويتان بالدرجات والراديان ،، بما ان طول القوس معلوم

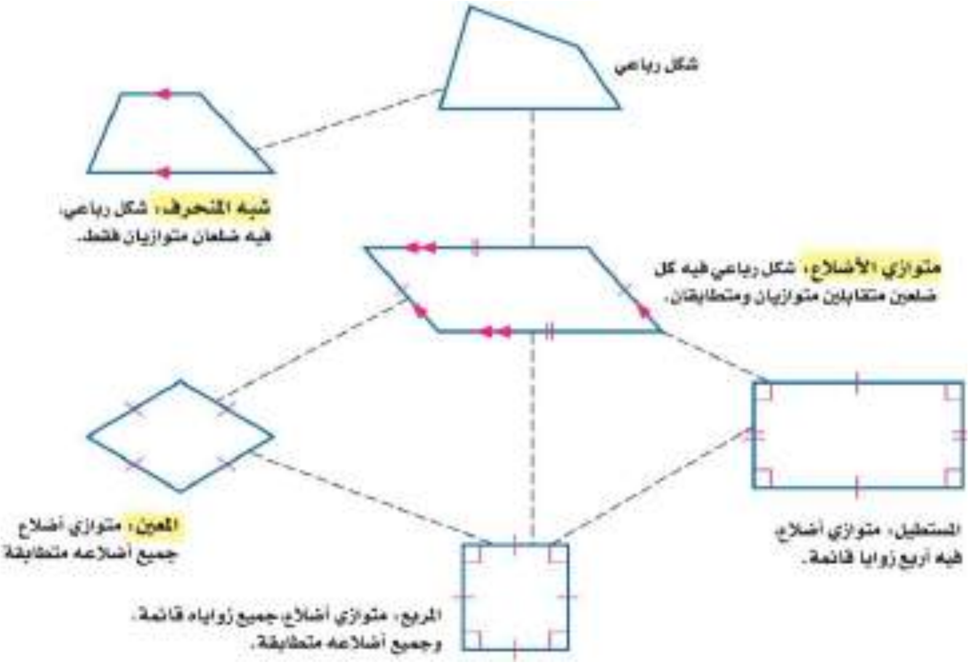
نستخدم لإيجاد الزاوية : $s=R\theta \rightarrow 22=14\theta_1 \ \rightarrow \frac{22}{14}=\theta_1 \ \rightarrow \theta_1=\frac{11}{7}$

بعد ان علمنا الزاوية بالراديان نوجدها بالدرجات : $\frac{11}{7}\times\frac{180}{\pi}=\ 90$

$$\frac{R^2}{2}(\theta_1-\sin\theta_2)=\frac{14^2}{2}\left(\frac{11}{7}-\sin 90\right)=56cm^2$$

الاشكال الرباعية :

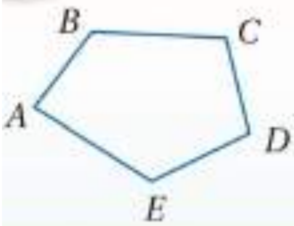
هو شكل مغلق يتكون من اربعة اضلاع واربعة زوايا مجموعها 360



نظرية 1.1 مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع

مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع محدب عدد أضلاعه n يساوي $S = (n-2)\cdot 180^\circ$.

مثال:



$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E = (5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$$

المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات	مجموع قياسات الزوايا الداخلية
مثلث	3	1	$180^\circ(1) = 180^\circ$
رباعي	4	2	$180^\circ(2) = 360^\circ$
خماسي	5	3	$180^\circ(3) = 540^\circ$
سداسي	6	4	$180^\circ(4) = 720^\circ$
ذو n من الأضلاع	n	$n-2$	$180^\circ(n-2)$

مثال : اوجد مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عشاري ؟

مجموع الزوايا $(10-2)\times 180 = 1440$

و اذا كان مضلع منتظم فإن زواياه متساوية ، نقسم الناتج على عدد الاضلاع لمعرفة مقدار الزاوية الواحدة : $\frac{(x-2)\times 180}{x}$

في المثال السابق اذا كان عشاري منتظم فإن قياس زاويته؟

اذا كان منتظم نقسم مجموع زواياه على عدد اضلاعه $\mathbf{144} = \frac{1440}{10}$

☼ومن هذا القانون نستنبط طريقة ايجاد عدد اضلاع مضلع منتظم بمعرفة احد زواياه

مثال مضلع منتظم زاويته الداخلية 135 اوجد عدد اضلاعه ؟

$$\frac{(x-2)\times 180}{x} = 135 \rightarrow 180x - 360 = 135x \rightarrow 180x - 135x = 360$$

$$\rightarrow 45x = 360 \quad \rightarrow \frac{45x}{45} = \frac{360}{45}$$

تبسيط وطرفين وسطين نستنتج ان x = 8

المضلع المحدب : هو كل مضلع بسيط قياس أياً من زواياه الداخلية اقل من 180 ، ولا يقطع امتداد أي ضلع فيه ضلع اخر من المضلع . من امثلته(مربع ،مثلث، مستطيل، متوزي اضلاع)

الزاوية الخارجية للمضلع : هي الزاوية المحصورة بين ضلع وامتداد ضلع آخر بحيث يكونان الضلعين مشتركين في رأس واحد

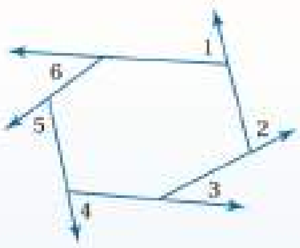
نظرية 1.2 مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع

أضف إلى مطويتك

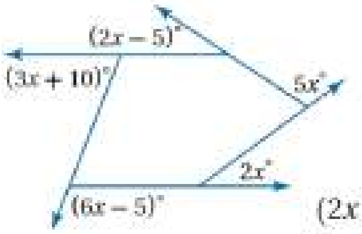
مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع المحدّب بأخذ زاوية واحدة عند كل رأس يساوي °360.

مثال:

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$



a) جبر، أوجد قيمة x في الشكل المجاور .



استعمل نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع لكتابة معادلة، ثم حُلّها لإيجاد قيمة x.

$$(2x-5)° + 5x° + 2x° + (6x-5)° + (3x+10)° = 360°$$

$$(2x + 5x + 2x + 6x + 3x)° + [-5 + (-5) + 10]° = 360°$$

$$18x° = 360°$$

$$x° = \frac{360°}{18} = 20$$

مثال اوجد قياس الزاوية الخارجية للتساعي المنتظم .

بما انه منتظم إذا" جميع زواياه الخارجية التسعة متطابقة ومجموعها 360

إذا" : $X = 40 \quad \rightarrow \quad \frac{360}{9} = X$

☼عدد أقطار مضلع :

$\frac{x(x-3)}{2}$ حيث ان x هو عدد الاضلاع

اوجد عدد اقطار سباعي (ذو سبعة اضلاع) ؟

$$\frac{7(7-3)}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ قطر}$$

عدد اقطار مضلع له 50 ضلع ؟

$$\frac{50(50-3)}{2} = \frac{2350}{2} = 1175$$

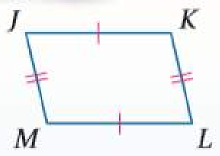
نظريات

أضف إلى مطويتك

خصائص متوازي الأضلاع

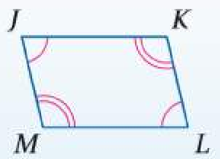
1.3 كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان.

مثال: $\overline{JK} \cong \overline{ML}$, $\overline{JM} \cong \overline{KL}$



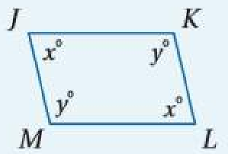
1.4 كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان.

مثال: $\angle J \cong \angle L$, $\angle K \cong \angle M$



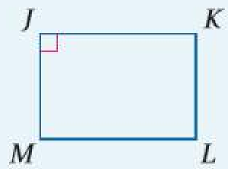
1.5 كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتان.

مثال: $x° + y° = 180°$



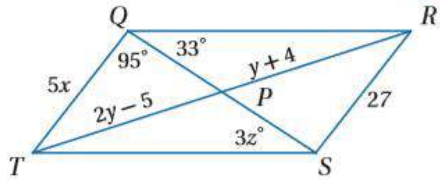
1.6 إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإن زواياه الأربع قوائم.

مثال: في $\square JKLM$، إذا كانت $\angle J$ قائمة، فإنّ : $\angle K, \angle L, \angle M$ قوائم أيضًا.



❖قطرا متوازي الاضلاع ينصف كل منهما الآخر ، ويقسمان الشكل الى مثلثين متطابقين

مثال 2 خصائص متوازي الأضلاع والجبر



جبر: إذا كان $QRST$ متوازي أضلاع، فأوجد قيمة كل من المتغيرات الآتية:

a) x

$\overline{QT} \cong \overline{RS}$	كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان
$QT = RS$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$5x = 27$	بالتعويض
$x = 5.4$	بقسمة كلا الطرفين على 5

b) y

$\overline{TP} \cong \overline{PR}$	قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كل منهما الآخر
$TP = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$2y - 5 = y + 4$	بالتعويض
$y = 9$	بطرح y وإضافة 5 لكلا الطرفين

c) z

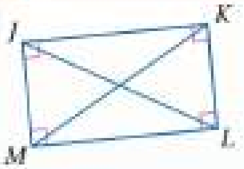
$\triangle TQS \cong \triangle RSQ$	قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين
$\angle QST \cong \angle SQR$	العناصر المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة
$m\angle QST = m\angle SQR$	تعريف تطابق الزوايا
$3z = 33°$	بالتعويض
$z = 11$	بقسمة كلا الطرفين على 3

نظرية 1.13 قطرا المستطيل

أضف إلى مطويتك

إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً، فإن قطريه متطابقان.

مثال: إذا كان $\square JKLM$ مستطيلاً، فإن $\overline{JL} \cong \overline{MK}$.



حدائق: حديقة مستطيلة الشكل تحتوي على ممرين كما في الشكل المجاور. إذا كان $PR = 200\ m$، فأوجد QT.

$\overline{QS} \cong \overline{PR}$	قطرا المستطيل متطابقان
$QS = PR$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$QS = 200$	بالتعويض

وبما أن $PQRS$ مستطيل، لذا فإن قطريه ينصّف كل منهما الآخر؛ لذا

$$QT = \frac{1}{2}QS$$

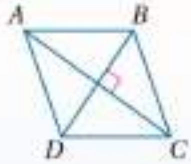
$$QT = \frac{1}{2}(200) = 100 \quad \text{بالتعويض}$$

نظريات

قطرا المعين

1.15 إذا كان متوازي أضلاع معينًا، فإن قطريه متعامدان.

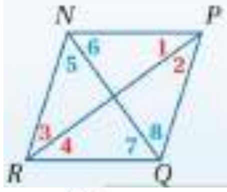
مثال: إذا كان $\square ABCD$ معينًا، فإنّ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



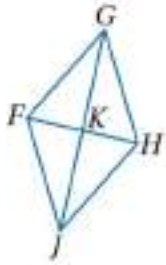
1.16 إذا كان متوازي أضلاع معينًا فإنّ كل قطر فيه ينصّف كلًا من الزاويتين اللتين يصل بين رأسيهما.

مثال: إذا كان $\square NPQR$ معينًا، فإنّ

$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$, $\angle 5 \cong \angle 6$, $\angle 7 \cong \angle 8$



استعن بالمعيّن $FGHJ$ المبيَّن جانبًا.



a) إذا كان $m\angle FJH = 82^\circ$، فأوجد $m\angle KHJ$.

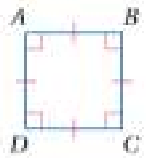
بما أن $FGHJ$ معيّن، فإنّ القطر $\overline{JG}$ ينصّف $\angle FJH$.

لذا فإن $m\angle KJH = \frac{1}{2} m\angle FJH$. إذن $m\angle KJH = \frac{1}{2}(82^\circ) = 41^\circ$

وبما أن قطري المعيّن متعامدان، فإنّ $m\angle JKH = 90^\circ$ بحسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

$m\angle KJH + m\angle JKH + m\angle KHJ = 180^\circ$	نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث
$41^\circ + 90^\circ + m\angle KHJ = 180^\circ$	بالتعويض
$131^\circ + m\angle KHJ = 180^\circ$	بالتبسيط
$m\angle KHJ = 49^\circ$	بطرح 131° من كلا الطرفين

المربّع هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم. تذكّر أن متوازي الأضلاع الذي زواياه الأربع قوائم يكون مستطيلًا، ومتوازي الأضلاع الذي أضلاعه الأربعة متطابقة يكون معيّنًا؛ لذا فعندما يكون متوازي الأضلاع معيّنًا وإحدى زواياه قائمة فإنّه يكون مربّعًا أيضًا، وعليه فإن المربع هو متوازي أضلاع ومستطيل ومعيّن.



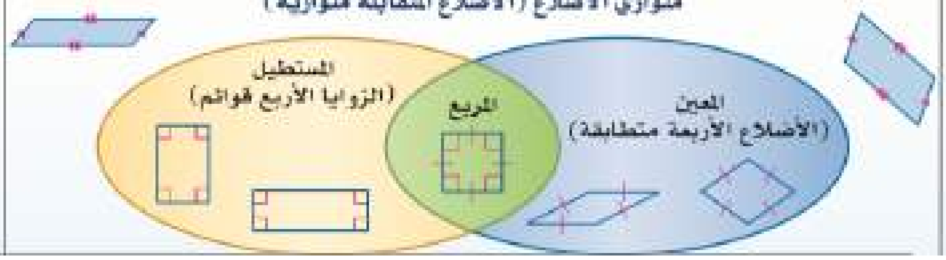
المربع $ABCD$

ويلخص شكل فن الآتي العلاقة بين متوازي الأضلاع والمعيّن والمربّع والمستطيل.

ملخص المفهوم

أضف إلى مطويتك

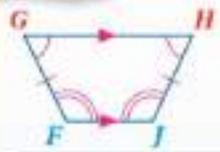
متوازي الأضلاع



نظريات

أضف إلى مطويتك

شبه المنحرف المتطابق الساقين

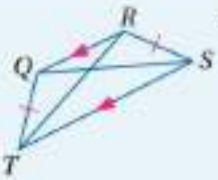


1.21 إذا كان شبه المنحرف متطابق الساقين، فإنّ زاويتي كل قاعدة متطابقتان.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $FGHJ$ متطابق الساقين، فإنّ $\angle G \cong \angle H$, $\angle F \cong \angle J$.

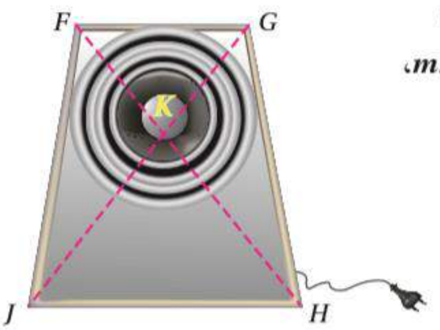
1.22 إذا كانت زاويتا قاعدة في شبه المنحرف متطابقتين، فإنّه متطابق الساقين.

مثال: إذا كان $KLMP$ شبه منحرف، فيه $\angle L \cong \angle M$ فإنه متطابق الساقين.



1.23 يكون شبه المنحرف متطابق الساقين، إذا وفقط إذا كان قطراه متطابقين.

مثال: إذا كان شبه المنحرف $QRST$ متطابق الساقين، فإنّ $\overline{QS} \cong \overline{RT}$. وكذلك إذا كان $QRST$ شبه منحرف، فيه $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ فإنه متطابق الساقين.



مكبرات الصوت: المنظر الأمامي لمكبِّر الصوت المبيّن جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $m\angle FJH = 85°$، $FK = 8\,in, JG = 19\,in$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :

a) $m\angle FGH$

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ $\angle GHJ$ و $\angle FJH$ زاويتا قاعدة متطابقتان؛ لذا فإن $m\angle GHJ = m\angle FJH = 85°$.

وبما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف، فإنّ $\overline{JH} \parallel \overline{FG}$.

$m\angle FGH + m\angle GHJ = 180°$	نظرية الزاويتين المتحالفتين
$m\angle FGH + 85° = 180°$	بالتعويض
$m\angle FGH = 95°$	بطرح 85 من كلا الطرفين

b) KH

بما أنّ $FGHJ$ شبه منحرف متطابق الساقين، فإنّ القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{JG}$ متطابقان.

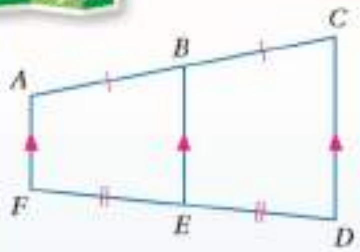
$FH = JG$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$FK + KH = JG$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$8 + KH = 19$	بالتعويض
$KH = 11\,in$	بطرح 8 من كلا الطرفين

نظرية 1.24 نظريّة القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

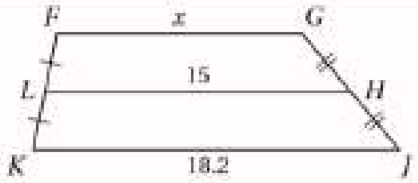
أضف إلى مطويتك

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلًا من القاعدتين، وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

مثال: إذا كانت $\overline{BE}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $ACDF$، فإن $\overline{AF} \parallel \overline{BE}, \overline{CD} \parallel \overline{BE}$، $BE = \frac{1}{2}(AF + CD)$.



في الشكل المجاور، $\overline{LH}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $FGJK$. ما قيمة x؟



اقرأ سؤال الاختبار

أعطيت في السؤال طول القطعة المتوسطة لشبه المنحرف وطول إحدى قاعدتيه. ويطلب إليك إيجاد طول القاعدة الأخرى.

حل سؤال الاختبار

$LH = \frac{1}{2}(FG + KJ)$ نظرية القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

$15 = \frac{1}{2}(x + 18.2)$ بالتعويض

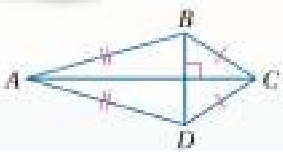
$30 = x + 18.2$ بضرب كلا الطرفين في 2

نظريات شكل الطائرة الورقية

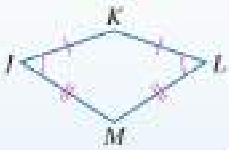
أضف إلى مطويتك

1.25 قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان.

مثال: بما أن $ABCD$ شكل طائرة ورقية، فإن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.



1.26 يوجد في شكل الطائرة الورقية زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، هما الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين متجاورين غير متطابقين.



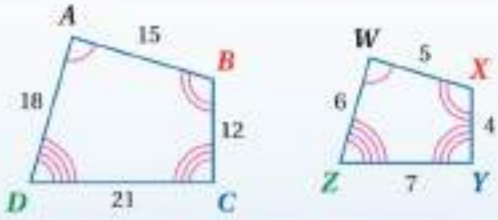
مثال: بما أن $JKLM$ شكل طائرة ورقية، فإنّ $\angle J \cong \angle L, \angle K \ncong \angle M$.

مفهوم أساسي — المضلعات المتشابهة

أضف إلى مطويتك

يتشابه مضلعان إذا وفقط إذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

مثال: في الشكل أدناه، $ABCD$ يشابه $WXYZ$.



الزوايا المتطابقة:

$\angle A \cong \angle W,\ \angle B \cong \angle X,\ \angle C \cong \angle Y,\ \angle D \cong \angle Z$

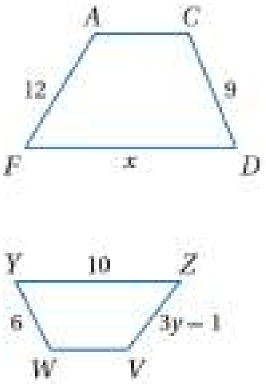
التناسب:

$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{3}{1}$

الرموز: $ABCD \sim WXYZ$

مثال 3 استعمال الأشكال المتشابهة لإيجاد القيم المجهولة

في الشكل المجاور، $ACDF \sim VWYZ$.



a) أوجد قيمة x.

استعمل أطوال الأضلاع المتناظرة لكتابة تناسب

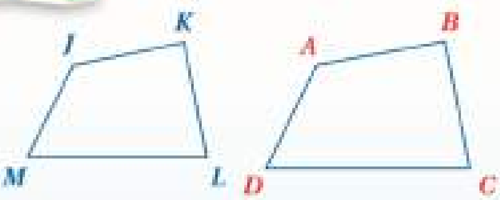
$\frac{CD}{WY} = \frac{DF}{YZ}$	الأضلاع المتناظرة متناسبة
$\frac{9}{6} = \frac{x}{10}$	$CD = 9,\ WY = 6,\ DF = x,\ YZ = 10$
$9(10) = 6(x)$	خاصية الضرب التبادلي
$90 = 6x$	بالضرب
$15 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 6

النسبة بين طولي ضلعين متناظرين لمضلعين متشابهين تُسمىّ **معامل التشابه**

نظرية 2.1 — محيطا المضلعين المتشابهين

أضف إلى مطويتك

إذا تشابه مضلعان، فإنّ النسبة بين محيطيهما تساوي معامل التشابه بينهما.



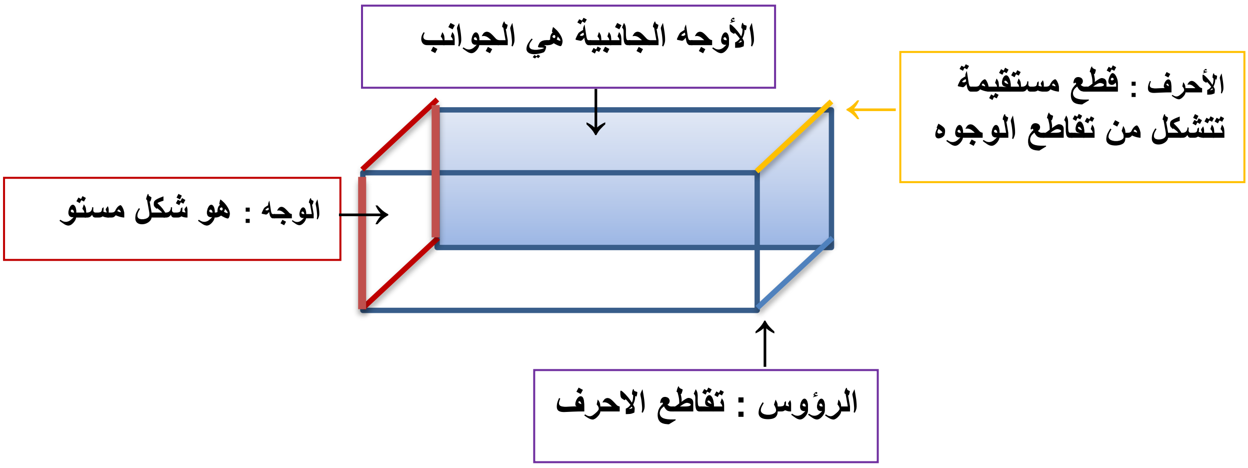
مثال: إذا كان $ABCD \sim JKLM$ ، فإنّ:

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{CD}{LM} = \frac{DA}{MJ} = \frac{AB + BC + CD + DA}{JK + KL + LM + MJ}$$

الأشكال ثلاثية الابعاد :

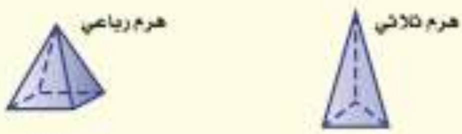
هو شكل له طول وعرض وارتفاع .

بعض المصطلحات المتعلقة به



خواص الاشكال الثلاثية الابعاد :

المنشور والهرم — مفهوم أساسي

الشكل	الخواص
المنشور	• له على الأقل ثلاثة أوجه جانبية كل منها متوازي أضلاع. • يُسمى الوجهان العلوي والسفلي قاعدتا المنشور، وهما مضلّعان متطابقان ومتوازيان. • يسمى المنشور بناءً على شكل قاعدته. 
الهرم	• له على الأقل ثلاثة أوجه جانبية مثلثية الشكل. • له قاعدة واحدة عبارة عن مضلع. • يسمى الهرم بناءً على شكل قاعدته. 

المخروط والأسطوانة والكرة

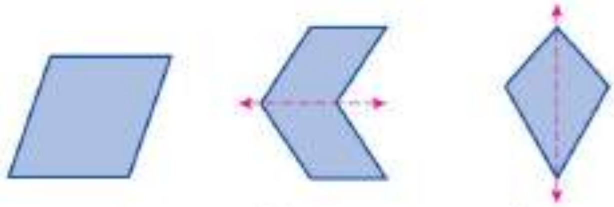
مفهومٌ أساسيّ

الشكل	الخواص
المخروط 	• له قاعدة واحدة فقط. • القاعدة عبارة عن دائرة. • له رأس واحد.
الأسطوانة 	• لها قاعدتان فقط. • القاعدتان عبارة عن دائرتين متطابقتين. • ليس لها رؤوس أو أحرف.
الكرة 	• تبعد جميع النقاط على الكرة المسافة نفسها عن المركز. • لا يوجد لها أوجه أو قواعد أو أحرف أو رؤوس.

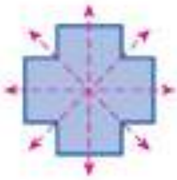
التحويلات الهندسيـة :

التناظر(التماثل) :

يقال: إن الشكل **متماثل حول محور** إذا أمكن طيه فوق مستقيم، ونتج عن ذلك نصفان متطابقان. ويسمى خط الطيّ في هذه الحالة **محور التماثل**.



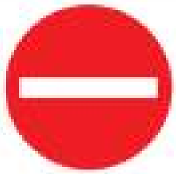
محور تماثل رأسي — محور تماثل أفقي — لا يوجد تماثل



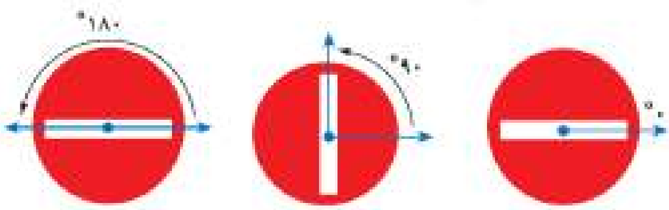
بعض الأشكال ـ مثل الخماسي في النشاط أعلاه ـ له أكثر من محور تماثل. والشكل عن اليسار له عدة محاور تماثل: أفقي، ورأسي، وقطران.

الشكل الذي له **تماثل دوراني حول نقطة** هو الذي يمكن تدويره حول هذه النقطة بزاوية أقل من ٣٦٠°، ليصبح كما كان في وضعه الأصلي تمامًا. ويُسمى قياس الزاوية التي تم تدوير الشكل بها **زاوية الدوران**. لبعض الأشكال زاوية دوران واحدة، بينما لأشكال أخرى عدة زوايا دوران مثل الخماسي المنتظم.

٢ **تصميم** : حدد ما إذا كان للشكل المجاور تماثل دوراني حول نقطة، اكتب نعم أو لا. وإذا كانت الإجابة نعم فاذكر زاوية أو زوايا الدوران.

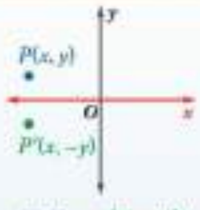
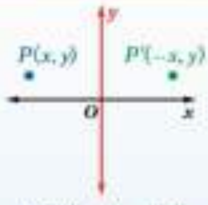
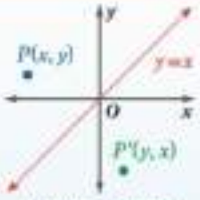


نعم. لهذا الشكل تماثل دوراني حول نقطة، حيث يكرر نفسه بعد دوران ١٨٠°.



الانـعكــاس :

المفهوم
الانعكاس في المستوى الإحداثي

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y	الانعكاس حول المستقيم $y = x$
		
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$

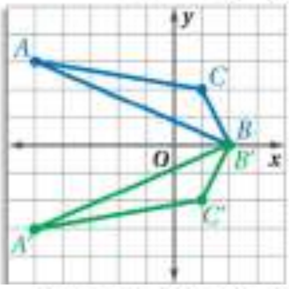
مثال 4 رسم صورة بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

مثّل كل شكل مما يأتي بيانيًا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

a) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 3), B(2, 0), C(1, 2)$ بالانعكاس حول المحور x .

اضرب الإحداثي y لكل رأس في -1 .

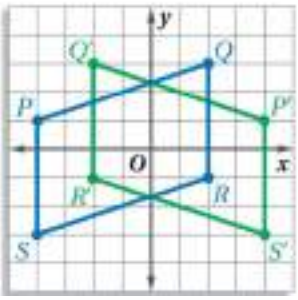
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
$A(-5, 3) \rightarrow A'(-5, -3)$
$B(2, 0) \rightarrow B'(2, 0)$
$C(1, 2) \rightarrow C'(1, -2)$



b) متوازي الأضلاع $PQRS$ الذي إحداثيات رؤوسه: $P(-4, 1), Q(2, 3), R(2, -1), S(-4, -3)$ بالانعكاس حول المحور y .

اضرب الإحداثي x لكل نقطة في -1

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
$P(-4, 1) \rightarrow P'(4, 1)$
$Q(2, 3) \rightarrow Q'(-2, 3)$
$R(2, -1) \rightarrow R'(-2, -1)$
$S(-4, -3) \rightarrow S'(4, -3)$

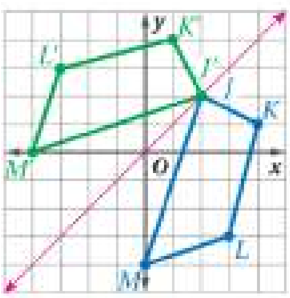


مثال 5 رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$

مثّل بيانيًا الشكل الرباعي $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(2, 2), K(4, 1), L(3, -3), M(0, -4)$، ثم ارسم صورته $J'K'L'M'$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

بدّل الإحداثيين x و y لكل الرؤوس.

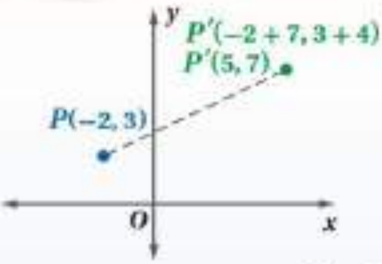
$(x, y) \rightarrow (y, x)$
$J(2, 2) \rightarrow J'(2, 2)$
$K(4, 1) \rightarrow K'(1, 4)$
$L(3, -3) \rightarrow L'(-3, 3)$
$M(0, -4) \rightarrow M'(-4, 0)$



الازاحة (الانسحـاب) : انتقال الشكل من موقع الى آخر دون تدويره .

مفهوم أساسي — الإزاحة في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك



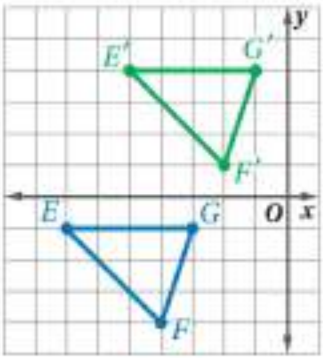
التعبير اللفظي: لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدةً أفقيًا، و b وحدةً رأسيًا، اجمع a إلى الإحداثي x، و b إلى الإحداثي y.

الرموز: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال: إذا كانت: $a = 7$, $b = 4$، فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة عن هذه الإزاحة هي $P'(5, 7)$.

مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

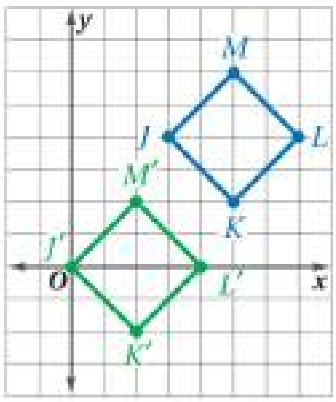
a) $\triangle EFG$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$



تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و 5 وحدات إلى أعلى .

$$(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 5)$$
$$E(-7, -1) \rightarrow E'(-5, 4)$$
$$F(-4, -4) \rightarrow F'(-2, 1)$$
$$G(-3, -1) \rightarrow G'(-1, 4)$$

b) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, 4), K(5, 2), L(7, 4), M(5, 6)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$



تدل هذه القاعدة على إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و 4 وحدات إلى أسفل .

$$(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 4)$$
$$J(3, 4) \rightarrow J'(0, 0)$$
$$K(5, 2) \rightarrow K'(2, -2)$$
$$L(7, 4) \rightarrow L'(4, 0)$$
$$M(5, 6) \rightarrow M'(2, 2)$$

الدوران :

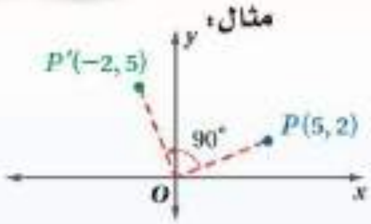
مفهوم أساسي الدوران في المستوى الإحداثي — أضف إلى مطويتك

الدوران بزاوية °90

عند تدوير نقطة بزاوية °90 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ، ثم بدّل موقعَي الإحداثيين x, y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

مثال:

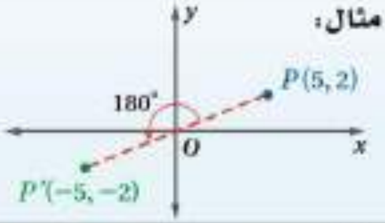


الدوران بزاوية °180

عند تدوير نقطة بزاوية °180 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلاً من الإحداثيّين x, y في -1

الرموز: $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

مثال:

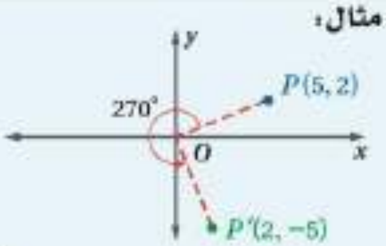


الدوران بزاوية °270

عند تدوير نقطة بزاوية °270 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ثم بدّل موقعَي الإحداثيّين x, y .

الرموز: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

مثال:



© الدوران بزاوية 360 يعيد الشكل الى وضعه الأصلي (صورة النقطة تكون نفسها)

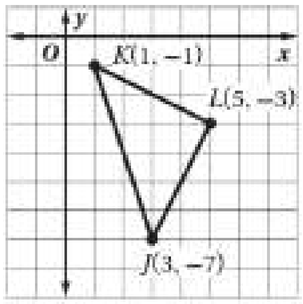
ما صورة النقطة J الناتجة عن دوران $\triangle JKL$ بزاوية °270 حول نقطة الأصل؟

A $(-3, -7)$

B $(-7, 3)$

C $(-7, -3)$

D $(7, -3)$



اقرأ سؤال الاختبار

لقد أعطيت $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(3, -7), K(1, -1), L(5, -3)$ ، وطُلب إليك أن تحدد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن دوران بزاوية °270 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

حُل سؤال الاختبار

لإيجاد إحداثيَّي صورة النقطة J الناتجة عن الدوران بزاوية °270 عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ، ثم بدّل الإحداثيّين x , y

$(x, y) \rightarrow (y, -x)$ $(3, -7) \rightarrow (-7, -3)$

فالإجابة الصحيحة هي C.

خاص بالمستوى 2

التـمـدد :

رسم التمدد: **التمدد** هو تحويل هندسي يكبّر الشكل أو يصغره بنسبة محدّدة هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي. وتسمى هذه النسبة **معامل مقياس التمدد**. ولأن الصورة الناتجة عن التمدّد تشبه الشكل الأصلي، فإن التمدد نوع من أنواع **تحويلات التشابه**. ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز التمدد ومعامله. من تعريف معامل مقياس التمدد، تجد أنه إذا كان معامل مقياس التمدد k أكبر من 1، فإن أبعاد الصورة أكبر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي وعندها يكون التمدد تكبيرًا. وإذا كان $0<k<1$، فإن أبعاد الصورة تكون أصغر من الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي، وعندها يكون التمدد تصغيرًا.

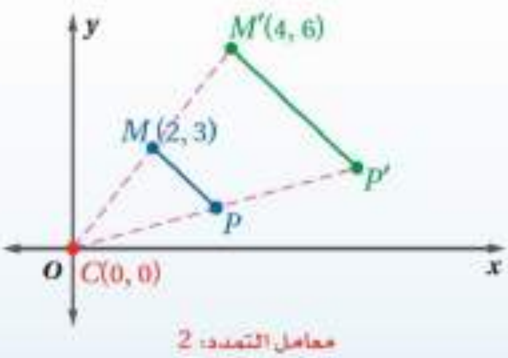
ويسمّى التمدد الذي معامله 1 تمددًا مطابقًا؛ إذ يكون الشكل الأصلي وصورته متطابقين.

مفهوم أساسي — التمدد في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لإيجاد إحداثيات الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، اضرب الإحداثيَّين x , y لكل نقطة في الشكل الأصلي في معامل مقياس التمدد k.

مثال:



الرموز: $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال 3 التمدد في المستوى الإحداثي

إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي: $J(-2, 4), K(-2, -2), L(-4, -2), M(-4, 2)$. مثّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله 2.5

اضرب الإحداثيين x و y لكل رأس في معامل التمدد 2.5

$(x, y) \rightarrow (2.5x, 2.5y)$

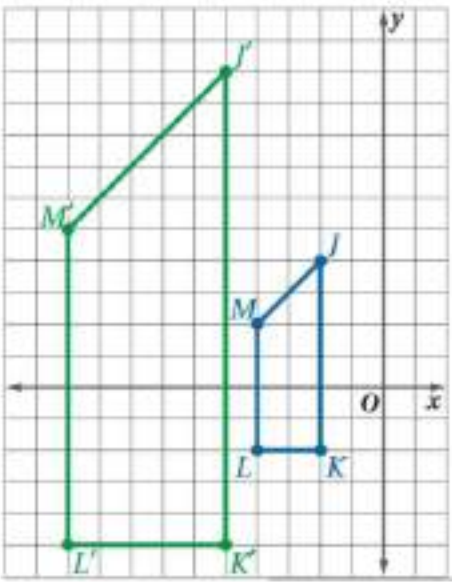
$J(-2, 4) \rightarrow J'(-5, 10)$

$K(-2, -2) \rightarrow K'(-5, -5)$

$L(-4, -2) \rightarrow L'(-10, -5)$

$M(-4, 2) \rightarrow M'(-10, 5)$

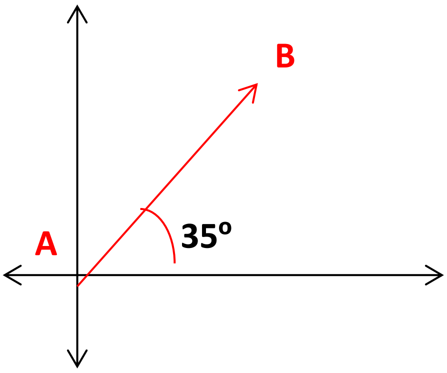
مثّل بيانيًّا $JKLM$ وصورته $J'K'L'M'$.



المتجهـــات :

الكمية المتجهة هي **كمية لها مقدار و اتجـــاه** ، **مثال** : قارب يسير بسرعة 15كلم/ع في اتجاه الجنوب ← كمية متجهة لان لها قيمة واتجاه

تمثل الكمية المتجهة بسهم ، يظهر كلا" من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل متجها يرمز له $\overrightarrow{AB}$ ،



و طول المتجه هو طول القطعة المستقيمة يرمز له $|AB|$

و يكون في الوضع القياسي اذا كانت نقطة

بداية المتجه هي نقطة الاصل .

واتجاه المتجه هو الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الافقي x ...

فمثلا : اتجاه المتجه هو 35^{o}

الصورة الإحداثية ل $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته A (-4, 2) ونقطة نهايته B(3,-5)

$=\langle X_2 - X_1 , Y_2 - Y_1\rangle$

$=\langle 3-(-4) , -5-2\rangle$

$=\langle 7 , -7\rangle$

ويمكن ايجاد طول المتجه باستخدام قانون المسافة بين نقطتين :

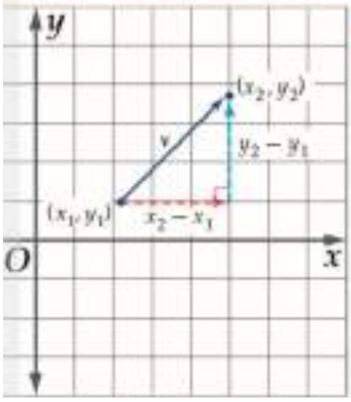
مفهوم أساسي **طول المتجه في المستوى الإحداثي**

إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1)، ونقطة نهايته (x_2, y_2)، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



العمليات على المتجهات :

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

مفهوم أساسي الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الاحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

ويكون المتجهين غير الصفريين متعامدين اذا كان حاصل ضربهما صفر

◄مثال : اوجد الضرب الداخلي للمتجهين U , V ثم تحقق مما اذا كانا متعامدين :

$U = \langle 3,6 \rangle \quad , \quad V = \langle -4,2 \rangle$

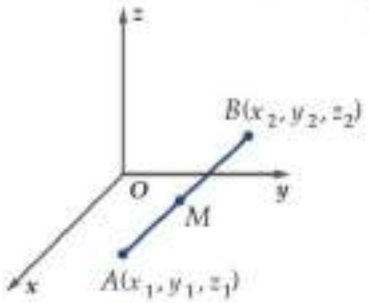
U . V = 3(-4) + 6(2)

U . V = 0

وبما ان حاصل ضربهما صفر فإنهما متعامدين

المتجهات في الفضاء :

مفهوم أساسي صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء



تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1 , a_2 , a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1 , b_2 , b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًا

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1 , ka_2 , ka_3 \rangle$

مفهوم أساسي الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle , \mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ في الفضاء كالآتي:
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a} , \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

مثال 1 إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5 \rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3 \rangle$

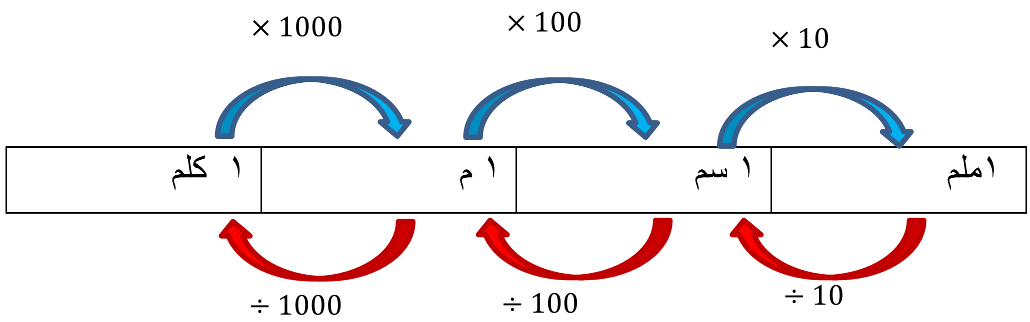
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u} , \mathbf{v}$ متعامدان.

وحدات الطول المشهورة :

10 ملم	= 1 سم
100 سم	= 1 م
1000 م	= 1 كلم

التحويل بين الوحدات : من الاصغر للأكبر نقسم ومن الاكبر للأصغر نضرب



مثال : غرفة عرضها 450cm فكم عرضها بالمتر ؟

من الاصغر للأكبر إذا نقسم (نعلم ان كل متر فيه 100 سم)

$$\frac{\mathbf{450}}{\mathbf{100}} = \mathbf{4.5\ m}$$

مثال: حاصل جمع $(10m + 22cm)$ هو :

1000cm	**1022cm**	**1220cm**	**2210cm**

يجب ان تكون جميعها بنفس الوحده ،، وبما ان الخيارات كلها بالسم إذا نحول المتر الى سم

10m عند التحويل للصغير نضرب : $10m = 1000cm$

ثم نجمع القيمتين : $1000 + 22 = 1022\text{cm}$

وحدة قياس المساحات (تربيع الاطوال)

100 ملم^2	= 1 سم^2
10000 سم^2	= 1 م^2
1000000 م^2	= 1 كلم^2

وحدات قياس الحجوم (تكعيب الاطوال)

1000 ملم^3	= 1 سم^3
1000000 سم^3	= 1 م^3
1000000000 م^3	= 1 كلم^3

وحدات قياس الكتلة

1000 ملجم	= 1 جم
1000 جم	= 1 كلجم

وحدات قياس السعة

1000 مللتر	= 1 لتر

وحدات قياس الزمن :

60 ثانية	دقيقة
60 دقيقة	ساعة
24 ساعة	يوم
30 يوم	شهر
12 شهر	سنة

وحدات الوزن

1000 غرام	1 كيلو غرام
1000 كيلو غرام	1 طن

مقياس الرسم :

يستعمل مقياس الرسم لقياس المسافات الطويلة جدا" او الصغيرة جدا" ويعطي المقياس نسبة تقارن بين مقياس الرسم والمقياس الحقيقي حيث تكون متناسبة .

مثال : إذا كان مقياس الرسم في الخريطة بين مكة وجدة : $1cm \rightarrow 24\ km$
(بمعنى : كل 24km سنعبر عنها ب 1cm) والمسافة في الخريطة بين مكة وجدة هي 3cm ، فأوجد المسافة الفعلية بينهم ؟ للحل نضعها على شكل كسرين متساويين (كسر يمثل المقياس وكسر يمثل المسافة على الخريطة والمسافة الفعلية)

على الخريطة

$$\frac{1}{24} = \frac{3}{x}$$

الفعلية

ضرب تبادلي $$24 \cdot 3 = 1 \cdot x$$

اذا" المسافة الفعلية $$x = 72\ km$$

مثال: اذا كانت المسافة على الخريطة 5 cm تمثل 2 km ، ما الطول على الخريطة الذي يمثل مسافة 800 m ؟

قبل الحل يجب ان تكون الوحدات متساوية (نحولها للوحدة الاصغر)

حولنا الكيلو متر الى متر ، $1km = 1000m \qquad \rightarrow 2km = 2000m$

المسافة الفعلية معلومية والمجهول هو المسافة على الخريطة .

$$\frac{5}{2000} = \frac{x}{800}$$

ضرب تبادلي $$2000 \cdot x = 5 \cdot 800$$

نقسم على 2000 : $$2000x = 40000$$

$$x = 2\ cm$$

مثال : إذا كان ارتفاع برج 180 مترا وارتفاعه في الصورة 6 سم أحسب مقياس الرسم الذي رسم به ؟

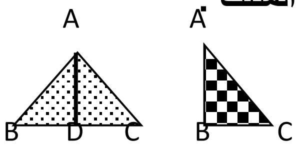
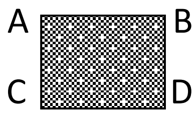
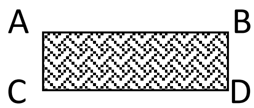
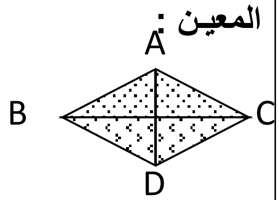
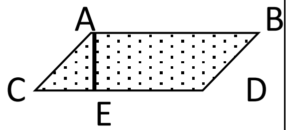
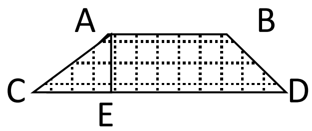
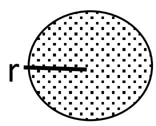
مقياس الرسم هو (البعد في الرسم على البعد الحقيقي) ، نقسمهما على بعض

$$= \frac{6}{180} = \frac{6 \times 1}{6 \times 30} = \frac{1}{30}$$

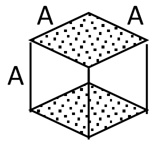
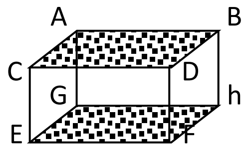
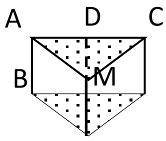
تبسيط بقدر الإمكان

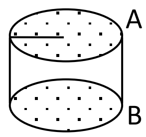
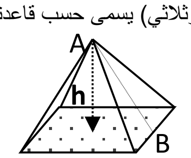
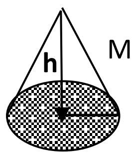
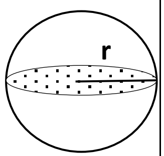
المقياس هو : $1cm \rightarrow 30m$

محيطات و مساحات الاشكال الثنائية الأبعاد :

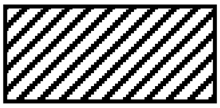
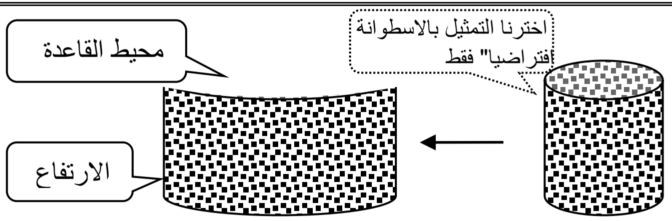
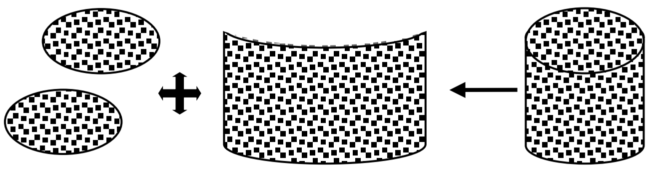
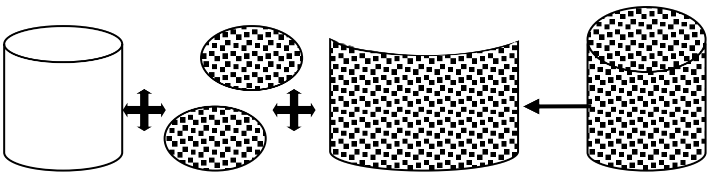
الشكـــل الهندسي	المحيـــــط	المســـــاحـــة
المثلث : 	$P = AB + BC + CA$ مجموع الاضلاع	$S_1 = \frac{BC \times AB}{2}$ نصف القاعدة × الارتفاع $S_2 = \frac{BC \times AD}{2}$
المربع: 	$P = AB + BD + CD + AC$ او $P = 4AB$ لان جميع اضلاع المربع متطابقة	$A = AB \times AC$ الطول × العرض
المستطيل : 	$P = AB + BD + CD + AC$ او $P = 2(AB + AC)$ لان كل ضلعين متقابلين متطابقين	$S = AB \times AC$ الطول × العرض
المعين : 	$P = AB + BD + CD + AC$ او $P = 4AB$ لان جميع اضلاع المعين متطابقة	$S = \frac{AD \times BC}{2}$ نصف حاصل ضرب القطرين
متوازي الاضلاع : 	$P = 2(AB + AC)$ كل ضلعين متقابلين متطابقين	$S = AB \times AE$ القاعدة × الارتفاع
شبه المنحرف : 	$P = AB + BD + CD + AC$	$S = \frac{(AB + CD) \times AE}{2}$ نصف مجموع القاعدتين × الارتفاع
الدائرة : 	$P = 2r\pi$ حيث: r نق القطر ، $\pi = 3.14$	$S = \pi r^2$

مساحات و حجوم الاشكال الثلاثية الابعاد :

الشكل الهندسي : المنشور (له على الاقل 3 اوجه جانبية متوازية اضلاع وقاعدتان)	**المكعب** (منشور مربع): 	**متوازي المستطيلات**(منشور مستطيلي) 	**المنشورالقائم** (ثلاثي) 
المساحة الجانبية:	$S_1 = 4A^2$ محيط القاعدة×الارتفاع $4A \times A$	$S_1 = 2(AB + AC) \times AG$ محيط القاعدة× الارتفاع	$S_1 = P \times AB$ P محيط القاعدة(مثلث) × AB الارتفاع
المساحة الكلية :	$S_2 = 6A^2$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$S_2 = S_1 + 2(AB \times AC)$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$S_2 = 2S + S_1$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين
الحجم :	$V = A^3$ مساحةالقاعدة×الارتفاع $A^2 \times A$	$V = (AB \times AC) \times AG$ مساحة القاعدة×الارتفاع	$V = S \times AB$ مساحة القاعدة×الارتفاع $\frac{AC \times MD}{2} \times AB$

الشكل الهندسي :	**الاسطوانة:** 	**الهرم :** نوعان (رباعي وثلاثي) يسمى حسب قاعدته 	**المخروط الدوراني:** 	**الكرة :** 
المساحة الجانبية:	$S_1 = 2\pi r \times AB$ محيط القاعدة×الارتفاع	$S_1 = \frac{P \times AB}{2}$ $\frac{\text{الارتفاع الجانبي} \times \text{محيط القاعدة}}{2}$	$S_1 = \frac{2r\pi \times M}{2}$ $\frac{\text{الارتفاع الجانبي} \times \text{محيط القاعدة}}{2}$	− − −
المساحة الكلية :	$S_2 = S_1 + 2\pi r^2$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	$S_2 = S_1 + S$ S_1المساحة الجانبية + S مساحة القاعدة	$S_2 = S_1 + S$ S_1المساحة الجانبية + S مساحة القاعدة	$S_2 = 4\pi r^2$ 4 اضعاف مساحة الدائرة
الحجم :	$V = \pi r^2 \times AB$ مساحة القاعدة×الارتفاع	$V = \frac{S \times h}{3}$ S مساحة القاعدة h الارتفاع	$V = \frac{S \times h}{3}$ S مساحة القاعدة h الارتفاع	$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

شرح مبسط لمفاهيم المساحات والحجوم :

☆ المحيط	الخط الذي يحيط المنطقة . مثل ❋ (اطار لوحة ، سور مزرعة)	
★ المساحة	جميع اجزاء المنطقة . مثل ❋ (اللوحة و المزرعة)	
☆ المساحة الجانبية	مساحة جوانب المنطقة ، بدون القواعد (محيط القاعدة × الارتفاع)	
☆★ المساحة الكلية	هي جميع اجزاء المنطقة الخارجية (الاطراف والقواعد) (محيط القاعدة × الارتفاع) + مساحة القاعدتين مثل ❋تغليف هدية	
★ الحجم	هو جميع اجزاء المنطقة (خارج الشكل و باطن الشكل) (مساحة القاعدة × الارتفاع) مثل❋(تغليف الهدية+الهدية)	

۞جميع الاشكال الثلاثية الابعاد تطبق عليها القوانين السابقة، باستثناء (الهرم والمخروط والكرة)

❖الهرم والمخروط : تكون اصغر من بقية الاشكال الاخرى اذا كانت لها القاعدة نفسها لذلك في قوانينها نقسم

المساحة الجانبية للهرم والمخروط : $\left[\frac{\text{الارتفاع الجانبي} \times \text{محيط القاعدة}}{2}\right]$ (نصف مساحة الاشكال الاخرى تقريبا)

حجم الهرم والمخروط : $\left[\frac{\text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{3}\right]$ (ثلث حجم الاشكال الاخرى)

،،،

❖الـــكـــرة :

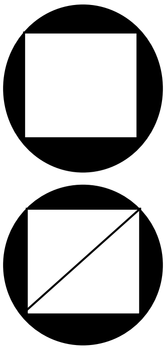
مساحة الكرة : $[4\pi r^2]$ ،، حجم الكرة : $\left[\frac{4\pi r^3}{3}\right]$

تمارين متنوعة على المحيطات و المساحات والحجوم :

- مربع داخل دائرة ، اوجد مساحة الجزء المظلل اذا كان قطر المربع cm20 ؟

96	100	112	114

معلومة : مربع داخل دائرة (متماسان) : قطر المربع = قطر الدائرة



نلاحظ ان الشكل الاكبر دائرة وفي داخلها مربع ،،، والمطلوب هو جزء من الدائرة (بدون المربع) إذاً سنوجد مساحة الدائرة ككل وننقص منها مساحة المربع ،،،

☼ قطر المربع هو الخط الواصل بين رأسين غير متتاليين (سيكون نفسه قطر الدائرة) : 20

مساحة المربع بمعلومية قطره : $200 = \frac{400}{2} = \frac{20^2}{2} = \frac{\text{مربع القطر}}{2}$

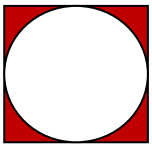
مساحة الدائرة : $r^2\pi = 10^2 \times 3.14 = 314$

$$314 - 200 = 114$$

- دائرة داخل مربع مساحته 144 ،،، اوجد مساحة الشكل المظلل ؟

12	31	33	24

معلومة : دائرة داخل مربع(متماسان) : ضلع المربع = قطر الدائرة



نلاحظ ان الشكل الاكبر مربع داخله دائرة ، والمطلوب هو جزء من المربع (بدون الدائرة) ، إذاً سنوجد مساحة المربع وننقص منه مساحة الدائرة

يجب معرفة مساحة المربع والدائرة .... ليس لدينا من المعطيات سوى مساحة المربع ، ونستطيع منه استخراج طول ضلعه (لكي نعرف قطر الدائرة ثم نوجد مساحتها) ..

مساحة المربع هو الضلع تربيع ،،، إذاً لمعرفة طول الضلع نوجد جذر المساحة

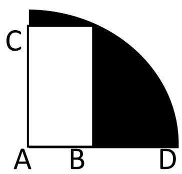
$\sqrt{144} = 12$ إذاً طول ضلع المربع 12 ،، للتحقق(مساحته : $12 \times 12 = 144$)

إذاً قطر الدائرة 12 ايضاً .. نق 6 .. مساحة الدائرة : $r^2\pi = 6^2 \times 3.14 = 113$

الشكل المظلل : $144 - 113 = 31$

- اذا كان AC=4 BD=3 , AB=2 اوجد مساحة الجزء المظلل :

12	20	10	5



نلاحظ ان الشكل ربع دائرة داخلها مستطيل ، يجب معرفة مساحة ربع الدائرة وننقص منها المستطيل

مساحة المستطيل : الطول ×العرض : $2 \times 4 = 8$

مساحة ربع الدائرة (نوجد مساحة الدائرة ثم نقسمها على 4)

نصف قطر الدائرة هو : $AB + BD = 5$

مساحة الدائرة : $5^2\pi = 78.5$ ،،

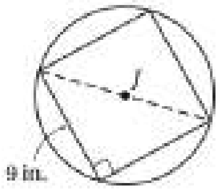
مساحة ربع الدائرة: $\frac{78.5}{4} \approx 20$ ،،، مساحة المظلل: $20 - 8 = 12$

إجابة قصيرة: إذا كانت الدائرة J تحيط بمربع طول ضلعه 9 in، وقطره يمثّل قطرها، فما القيمة الدقيقة لمحيط $\odot J$.

اقرأ سؤال الاختبار

احسب قطر الدائرة، واستعمله لحساب محيطها.

حُلّ سؤال الاختبار



ارسم شكلًا توضيحيًا فيه: قطر المربع يمثّل قطرًا للدائرة أيضًا، ويكون وترًا لمثلث قائم الزاوية.

$a^2 + b^2 = c^2$	نظرية فيثاغورس
$9^2 + 9^2 = c^2$	بالتعويض
$162 = c^2$	بالتبسيط
$9\sqrt{2} = c$	بأخذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

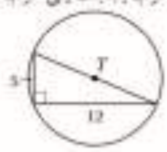
قطر الدائرة يساوي $9\sqrt{2}$ in

أوجد المحيط بدلالة π، بتعويض $9\sqrt{2}$ لقيمة d في الصيغة $C = \pi d$.

محيط الدائرة يساوي $9\pi\sqrt{2}$ in

تدريب على اختبار

41) ما محيط $\odot T$؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عُشر. 40.8



42) جبر: أحاط إبراهيم حديقته الدائرية الشكل بسياج. إذا كان طول السياج 50 m، فما نصف قطر الحديقة؟ قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح. C

A 10	C 8
B 9	D 7

41) نلاحظ ان طول وتر المثلث هو قطر الدائرة ،

$$5^2 + 12^2 = T^2 \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{169} \quad \rightarrow T = 13$$ ،

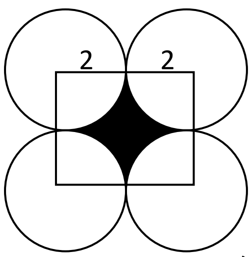
محيط الدائرة: $40.8 \quad \leftarrow \quad$ القطر $\times\ \pi = 13 \times 3.14$

42) طول السياج هو المحيط ،، ومن المحيط سنستنتج القطر

قانون المحيط : القطر $\times\ \pi = 50 \quad \rightarrow \quad \frac{50}{\pi} = 16$ ،، ***نصف القطر :*** **8**

- **اوجد مساحة الشكل المظلل إذا كان نصف قطر كل دائرة cm2 ؟**

$4 - 16\pi$	$16 - \pi$	$4(4 - \pi)$	$4 - \pi$



نرسم مربع رؤوسه تمس منتصف الدوائر ، وبذلك سيكون طول ضلعه يساوي قطر الدائرة (*4*)

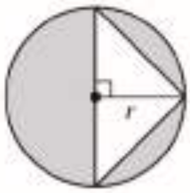
نوجد مساحة المربع وننقص منه ارباع الدائرة ليتبقى المظلل

4 **ارباع الدائرة = الدائرة ،،، اذاً مساحة المربع ناقص الدائرة**

$$(4 \times 4) - (2^2\pi) = 16 - 4\pi$$

هذه هي مساحة الشكل المظلل لكن غير موجودة في الخيارات نبحث عن التي تكافئها . نبسط : $16 - 4\pi = 4(4 - \pi)$

34) **جبر:** أيٌّ مما يأتي يُمثل مساحة المنطقة المظلّلة؟



A πr^2 C $\pi r^2 + r$

B $\pi r^2 + r^2$ D $\pi r^2 - r^2$

نلاحظ ان الشكل الكبير دائرة وداخلة مثلث .. يجب ايجاد مساحة الدائرة ونقص منها مساحة المثلث لكي يبقى الجزء المظلل .

(ارتفاع المثلث = نق الدائرة = r) و (قاعدة المثلث = قطر الدائرة= $2r$)

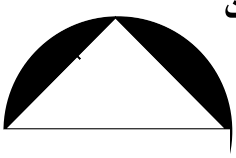
مساحة الدائرة: $r^2\pi$ .. مساحة المثلث: $r^2 = \frac{2r^2}{2} = \frac{2r\times r}{2}$

الجزء المظلل : $r^2\pi - r^2$ الحل : D

- **اوجد مساحة المظلل اذا كان نق الدائرة يساوي *10* ،**

50	**55**	**57**	**60**

الشكل نصف دائرة بداخلها مثلث ،، نوجد مساحتها وننقص منها المثلث

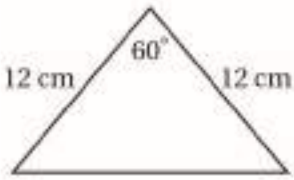


مساحة الدائرة : $\pi 10^2 = 314$ ، مساحة نصفها: $\frac{314}{2} = 157$

(ارتفاع المثلث = نق الدائرة = 10) و (قاعدة المثلث = قطر الدائرة= 20)

مساحة المثلث: $\frac{10\times 20}{2} = 100$ ، مساحة المظلل : $157 - 100 = 57$

32) ما محيط المثلث المجاور؟ C



A 24 cm C 36 cm

B 34.4 cm D 104 cm

نلاحظ ان هناك ضلعين متطابقين إذاً الزاويتين متطابقتان ،،

$$A + A + 60 = 180 \rightarrow 2A = 120 \rightarrow A = 60$$

جميع الزوايا 60 . إذاً مثلث متطابق الزوايا وبذلك سيكون مثلث متطابق الاضلاع *12*

المحيط هو مجموع الاضلاع : $12 + 12 + 12 = 36$

- كوخ صغير نريد طلاء جدرانه الاربعه وسقفه من الخارج .. حيث ارتفاعه 5متر وطوله 4 متر وعرضه 6 متر ،، وله باب طوله مترين وعرضه متر ،،، وشباكين طولها وعرضها متر ،، فكم لتر سنحتاجه لطلاء الكوخ بدون الباب والشبابيك (إذا كان كل $1m^2$ يستهلك $2L$) ؟؟

240L	124L	120L	100L

نلاحظ ان الشكل متوازي اضلاع نوجد مساحته الكلية :
(المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين) ... لكن في هذه الحالة سنكتفي بإحدى القاعدتين لإننا لن نصبغ سوى السقف (القاعدة العلوية)
إذا" سنوجد مساحته الجانبية + مساحة القاعدة
(محيط القاعدة × الارتفاع) + (الطول ×العرض)

$$(20 \times 5) + (6 \times 4) = 100 + 24 = 124$$

سنحتاج الى 124 لتر لطلائه ،،،، لكن لدينا الباب والشبابيك تأخذ مساحة ويجب عدم طلائها ،،، إذا" سنوجد مساحتها .. وننقصها من المساحة الكلية ..

$$(2 \times 1) + 2(1 \times 1) = 4$$

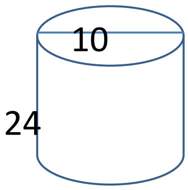
$$124 - 4 = 120m^2$$

في السؤال كل $1m^2$ يستهلك $2L$: إذا"

$$120 \times 2 = 240L$$

- اسطوانة نريد طلائها من الداخل والخارج بدون القاعدتين ، فكم سنحتاج من الطلاء؟

$\pi 480$	$\pi 240$	120π	$60\,\pi$



المساحة الجانبية للأسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

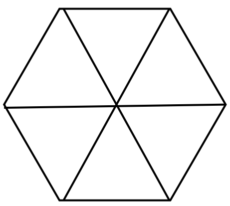
$$2\pi \,.\, 5 \times 24 = \pi 240$$

الان نضرب المساحة في 2 ، لأننا نريد الطلاء من الداخل ايضا"

$$\pi 240 \times 2 = \pi 480$$

- قالب من الجبنة سداسي الشكل يحتوي على 6 قطع ارتفاعها 2 سم ،، ومساحة قاعدتها 10 ،، اوجد كمية الجبن إذا كان لدينا 3 قوالب ؟

360	120	100	20



نلاحظ ان قطعة الجبن شكلها الهندسي (منشور ثلاثي)
نوجد حجمها (مساحة القاعدة× الارتفاع) = $10 \times 2 = 20$
اذاً كل حبه حجمها 20 والقالب الواحد يحتوي 6 حبات إذاً

$$6 \times 20 = 120$$

ولدينا 3 قوالب : $3 \times 120 = 360$

اسئلة المعيار الثالث والرابع :

١- اسطوانة محيط قاعدتها 31.4m وارتفاعها 4m مملوءة بالماء وكان بها فتحة تفرغ $1m^3$ في دقيقة ، ففي كم دقيقة يتم تفريغها كاملة .

640	512	413	314

٢- ارض مستطيلة ابعادها 40 , 30 تم زراعة 25% منها أرز ، و 10% منها قمح ، احسب مساحة المتبقي منها .

620	720	780	870

٣- دائرة نصف قطرها 100m رسم 20 دائرة صغيرة على قطرها اوجد نسبة المساحة بين احدى هذه الدوائر الصغيرة و مساحة الدائرة الكبيرة .

$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{3}{400}$

٤- اوجد مساحة الدائرة التي معادلتها : $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-6=0$

-12π	6π	12π	-6π

٥- غرفة مستطيلة محيطها 48m لو زاد عرضها 2m ونقص طولها 2m ، لو اصبحت مربعة فستصبح مساحتها :

240	200	120	144

٦- اذا كانت مساحة الارض $510km^2$. ويغطي 70% منها مـاء . فكم تبلغ مساحة اليابسة ؟

200	150	153	100

٧- دائرة مقسمة ٣ اقسام وفيها قسم الحاسب زاويته 120 فما نسبته المؤية ؟

33	30	40	35

٨- مربع اذا جعلنا طول ضلعه ثلاثة امثاله ، فكم نسبة الزيادة في مساحته؟

300%	600%	800%	900%

٩- اذا كانت زاوية طلاب الصف الرابع 90^o ، ما عدد طلاب هذا الصف اذا كان عدد الطلاب جميعا 120 .

20	30	40	50

١٠- اذا كان قطر العجلة 60m ، فكم ستقطع اذا دارت 15 دورة .

2650	2643	2826	2900

١١- أي الزوايا التالية لا تصلح ان تكون زاوية في شكل رباعي .

120	200	360	100

١٢- اذا كان لدينا مستطيل وقسم الى 4 مربعات ، وكل مربع قسم الى 25 جزء و ظلل مربع واحد فقط ، فأوجد نسبة المظلل .

$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{50}$

١٣- مثلث مختلف الاضلاع محيطه 35 واحد اضلاعه 16 والفرق بين طولي الضلعين الاخرين 3 فما هو طول الضلع الاصغر ؟

9	8	10	6

١٤- اسطوانة مملوءة حتى سدسها ، فإذا اضفنا 6 لترات اصبحت مملوءة حتى النصف فكم حجم الاسطوانة .

18	20	16	24

١٥- مستطيل ابعاده 35 - 21 قسم الى مربعات اذا علمت ان طول ضلع المربع اكبر من الواحد وهو عدد صحيح ، فأوجد طول ضلع المربع .

5	7	3	8

١٦- مثلث قائم الزاوية اطوال اضلاعه 10 . 8 . 6 ومساحة المستطيل تساوي ضعف مساحة المثلث حيث طول ضلع المستطيل تساوي 6cm احسب محيط المستطيل .

28	24	20	19

١٧- مربع محصور داخل دائرة مساحته 100cm فأوجد مساحة الدائرة

24π	20π	30π	50π

١٨- مثلث قاعدته تساوي 7cm ومساحة المثلث يساوي مساحة دائرة نصف قطرها 7cm المطلوب احسب ارتفاع المثلث .

14π	$\pi28$	$\pi21$	$\pi7$

١٩- ما مساحة اكبر دائرة يمكن رسمها داخل مربع طول ضلعه 8cm

$\pi20$	16π	$\pi8$	$\pi24$

٢٠- في مثلث طول ضلعين الاول يساوي 6cm والثاني يساوي 6cm الزاوية بينهم 60 ، احسب طول الضلع الثالث .

6	4	8	3

٢١- مجموع مساحة أوجه مكعب يساوي $96cm^2$ ، ما طول ضلع المكعب .

9	4	6	١٠

٢٢- متوازي مستطيلات ابعاده 8-5-4 نريد ان نضع به مكعبات طول حرف المكعب الواحد 2cm فكم مكعب يمكن أن نضع .

20	18	16	14

٢٣- اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (6,3-) وميله 2-

Y=2X+9	Y=-2X+9	Y=2X-9	Y=-2X-9

٢٤- - ميل المستقيم الذي معادلته 3x+4y=5

$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$

٢٥- إذا زاد طول قاعدة المثلث 30% و نقص ارتفاعه 10% ، فما نسبة الزيادة في المساحة

10%	17%	30%	19%

٢٦- معادلة المستقيم المار بالنقطة (2,1) و يوازي المستقيم y+4x=8

Y+9x=4	y-9x=4	y-4x=9	Y+4x=9

٢٧- اوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم y=2x+1 عند النقطة (2,-4)

$y = \frac{1}{2} + 3$	$y = \frac{-1}{2} + 3$	$y = \frac{-1}{2} - 3$	$y = \frac{1}{2} - 3$

٢٨- مركز الدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 23$.

(-2,-3)	(2,-3)	(2,3)	(-2,3)

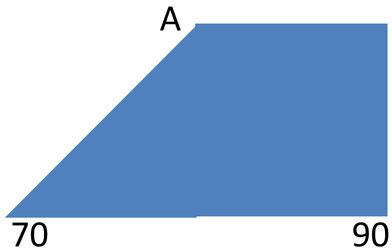
٢٩- عدد أقطار منظم له 123 ضلع هو

7380	7234	7450	7321

٣٠- المضلع المنتظم الذي زاويته 108 هو

٢	3	5	7

٣١- *ماقياس زاوية شبه المنحرف الذي زاويته قائمة و الزاوية الثانية 70 فما قياس الزاوية A ؟*



100	110	120	130

٣٢- *مشى شاب 5 متر شمال و 3 متر شرق وتوقف ، ومشى اخر 6 متر شرق و 9 متر شمال ، كم الفرق بينهما بالمسافة ؟*

7	*5*	*9*	*11*

٣٣-

$$\frac{\sin x(\sin x - \cos x) + (\cos x)^2(\tan x + 1)}{\sec x} =$$

$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$

٣٤- اذا قطع سياج حول حديقة على شكل معين طولا قطراه 12m، 16m فما طول السياج بالمتر

10	28	40	96

٣٥- *مثلث اطوال اضلاعه* x , y , z *فما هو الخيار الصحيح ؟*

x> z	$x > y$	$x - z < y$	$z > y$

٣٦- بناء طوله *12m* وعرضه *8m* وارتفاعه *5m* ، به *10* شبابيك مساحة سطح الواحد فيها $1.5m^2$ وباب مساحته $5m^2$، اذا اردنا طلاء جدرانه وكان كل $1.5\ m^2$ يستهلك *1* لتر . كم لتر يستهلك طلاء البناء ؟

100L	*120L*	*150L*	*200L*

٣٧- اوجد طول المحور الأكبر للقطع: $x^2 + 4y^2 = 4$

2	4	8	16

٣٨- كرة قسمت الى نصفين وتم الصاقها بطرفي اسطوانة مساوية لها في القطر ، ارتفاع الكرة *h=* ، نصف القطر *r =* ، ماهو الارتفاع للشكل الجديد

h+2r	*h+r*	*2h+r*	*2h+2r*

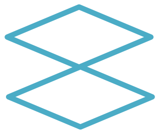
٣٩- دائرة مساحتها 16π اوجد مساحة المثلث :

4	*8*	*16*	*64*

٤٠- ما معادلة القطع المكافئ بالشكل :

$x=(y-1)^2$	$y=(x-1)^2$	$x=y^2+1$	$y=x^2-1$

٤١- عدد محاور تناظر الشكل :



4	2	1	0

٤٢- مثلثين أضلاعهم x ,y,z ، 4x,4y,4z اوجد النسبة بين مساحتهما ؟

16	*8*	*4*	*2*

٤٣- المسافة بين مدينتين A , B على الرسم هو 9cm ،،، اذا علمت ان مقياس الرسم هو 2cm: 60km

			270

٤٤- تم عمل انعكاس للنقطة (a,b) حول محور y ثم دوران بزاوية 90 درجة عكس عقارب الساعة فما هي النقطة الناتجة ؟.

(b,a)	$(-b,-a)$	$(-a,-b)$	$(-a,b)$

٤٥- رأس القطع المكافئ : $y=\ 1-x-x^2$

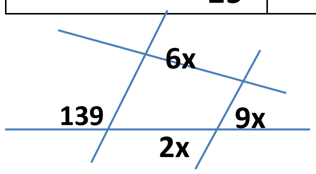
$\left(-\frac{1}{2},\frac{-5}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{-5}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

٤٦- راديان هو :

0	57	90	180

٤٧- اوجد مقدار x في الشكل التالي :

19	17	13	11



0

الحلــــول :

١- محيط القاعدة 2πنق = 31.5

2×3.14×نق = 31.5 نستنتج ان نصف القطر 5

الان نحسب الحجم = الارتفاع × π(نق)^2 = 314

ويفرغ $1m^3$ في الدقيقة اذا سيستغرق 314 دقيقة

٢- نوجد المساحة أولاً" وهي الطول ضرب العرض 30×40=1200

ثم نوجد النسبة المطلوبة 65% = (10+25) - 100

نريد نسبة 65% من المساحة 1200 (الجزء مجهول ،، قوانين النسبة)

$$\frac{x}{1200}=\frac{65}{100}\quad\rightarrow x=780$$

٣- قطر الدائرة الكبيرة= 200 والدوائر الصغيرة ممتدة على قطرها ، اذا مجموع اقطار الدوائر الصغيرة يساوي قطر الكبيرة : $20x=200 \rightarrow x = 10$

اذا" قطر الصغيرة 10 ، الان نوجد مساحتيهما ونقارن بينهما :

الكبيرة $\pi(\text{نق})^2 = \pi 100^2 = \pi 1000$

الصغيرة $\pi(\text{نق})^2 = \pi 5^2 = \pi 25$ **الان نوجد نسبة الصغيرة الى الكبيرة**

$$\frac{\pi 25}{\pi 10000} = \frac{1}{400}$$

٤- المعادلة العامة للدائرة :

$$x^2 + y^2 = \text{نق}^2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 6 \quad \gg \quad x^2 + y^2 = 12$$

اذا" $\text{نق}^2 = 12$

ومساحة الدائرة : $\text{نق}^2\pi = 12\pi$

٥- نفرض الطول x والعرض y ،،،

المحيط الحالي : 2x + 2y =48

X + y =24 >>> 1

ومنه نستنتج مجموع الطول والعرض ،، الان ننقص طولها ونزيد عرضها 2 ، ليصبحا اضلاع مربع (وهما متساويان)

x-2 = y+2

X= y+4 وبالتعويض بقيمة x في المعادلة 1 لاستنتاج قيمة y

Y+4+y=24 >>>> y=10 >>> y+2=12

،،،،

اذا" اضلاع الغرفة المربعة *12* والمساحة : *12×12= 144*

٦- نوجد الجزء (قوانين النسبة)

$$\frac{x}{510} = \frac{70}{100} \quad \rightarrow x = 357$$ مساحة الماء

الان نريد مساحة اليابسة : 510 - 357 = 153

٧- المطلوب النسبة ،،، نعلم ان قياس الدائرة = 360

$$\frac{x}{100} = \frac{120}{360}$$

X = 33

٨- ضلع المربع x ويصبح 3x

نحسب المساحة الأولى = x^2

المساحة الثانية = $9x^2$

الفرق بينهم $9x^2 - x^2 = 8x^2$ اذاً زادت 8 اضعاف وهو 800%

٩- $\frac{x}{120} = \frac{90}{360}$

X =30

١٠- نوجد محيطها ونضربه في 15

محيط الدائرة : 2نق π = 2×30×3.14 = 188.4

188.4×15= 2826m

١١- 360 لانها مجموع زوايا الرباعي

١٢- - عدد المربعات الصغيرة 4 ×25 =100

نسبة واحد منها : $\frac{1}{100}$

١٣- 35 = x+y+16

X + y = 19 1

x-y =3 > x=3+y نظام معادلات نحله بالتعويض

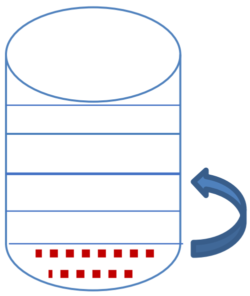
التعويض في 1

3 + y + y = 19

Y =8

١٤- نقسم الأسطوانة 6 اقسام ، وعند إضافة 6 وصلت للنصف

وهو السدسين اذاً السدس هو 3 . وحجمها : 3×6=18



١٥- نوجد القواسم المشتركة للعددين : 21 = 21,1,7,3

35= 35,1,7,5

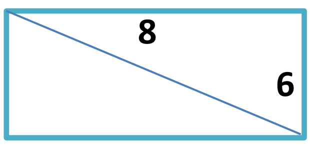
المشتركة 1 ,7 ولكن استثنينا 1 ، اذا الحل 7

١٦- يعني ان المستطيل عبارة عن مثلثين متطابقين

ونعلم ان أطول ضلع في المثلث هو الوتر = 10 ،

اذاً ضلعي المستطيل 8,6

ومحيطه : 8+8+6+6= 28



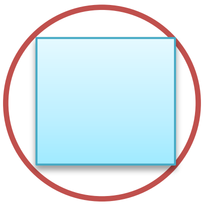
١٧- *نوجد قطر المربع و هو نفسه قطر الدائرة :*

مساحته 100 *،، يعني ان طول ضلعه* 10

والمربع عبارة عن مثلثين قائمي الزاوية

ومن نظرية فيثاغورس نوجد الوتر في المثلث

وهو قطر المربع



مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الاخرين

$$x^2 = 10^2 + 10^2$$

X = 14.14 ونصف القطر هو 7.07

الان نوجد مساحة الدائرة وهي : πنق^2 = 50π

١٨- نوجد مساحة الدائرة ونساويها بمساحة المثلث :

مساحة الدائرة والمثلث = $\pi 49$

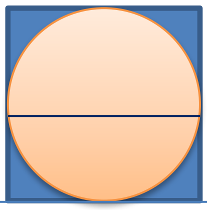
الارتفاع × نصف القاعدة = $\pi 49$

A × $\frac{7}{2}$ = $\pi 49$

A=14π

١٩- دائرة داخل مربع يعني ان قطرها هو ضلع المربع

اذا" قطرها = 8



المساحة : πنق^2 = 16π

٢٠- *مثلث متساوي الساقين فإن زاويتي قاعدته*

متساويتان نرمز لها X

2X + 60 =180 >> X =60

اذا جميع الزوايا 60 *واذا كانت زواياه متطابقة فإن اضلاعه متطابقة*

الحل 6

٢١- *مساحة المكعب =* مساحة الوجه الواحد × 6

نفرض ان مساحة الوجه A : $6A = 96$

$$\frac{6A}{6} = \frac{96}{6} \gg A = 16$$

وجه المكعب هو مربع ، مساحته (الضلع تربيع)

$$X^2 = 16 > X = 4$$

٢٢- *يجب ان تكون ابعاد المستطيل جميعها تقبل القسمة على طول*

حرف المكعب واذا لم تكن كذلك نقرب لاقرب عدد يقبل(الاصغر)

ابعاد المستطيل تقبل القسمة على 2 *باستثناء* 5 *فنقربه الى* 4

اذا" حجم متوازي المستطيلات يصبح : 8 ×4×4=128

و حجم المكعب : $2\times2\times2 = 8$

$128 / 8 = 16$

٢٣- $(Y - Y_1) = M(X - X_1)$

$$Y - 3 = -2(X + 6)$$

$$Y = -2X - 9$$

٢٤- نجعل المعادلة على الصورة القياسية

$Y= ax + b$

$4y = -3x+5$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{5}{4}$$

اذاً الميل هو $\frac{-3}{4}$

٢٥- نفرض ان القاعدة 20 والارتفاع 10 تصبح مساحة المثلث 100

نوجد مقدار 30% من القاعدة ثم نضيفه عليها

$$20 \times \frac{30}{100} = 6 > 20 + 6 = 26 :$$

نوجد مقدار 20% من الارتفاع وننقصه منه

$$10\times \frac{10}{100} = 1 > 10 - 1 = 9$$

مساحة المثلث الجديد : $\frac{26\times9}{2} = 117$

الزيادة $117-100 = 17$

الان نوجد النسبة (النسبة مفقودة) من قوانين النسب

$$\frac{17}{100} = \frac{x}{100} > x = 17\%$$

٢٦- ايجاد الميل ثم التعويض بالنقطة

بما انهما متوازيان فإن ميل المستقيمان هو نفسه ،

نوجد الميل للمستقيم الموجود (سالب معامل x قسمة معامل y) :

$$\frac{-4}{1} = -4$$

$(y-1) = -4(x-2)$

$Y= -4x +9$ ، ننقل للطرف الاخر لكي تكافئ القيم في الاختيارات

$Y+ 4x = 9$

٢٧- ميل المستقيم مضروبا في ميل المستقيم العمودي عليه= -1

نوجد الميل للمستقيم : $\frac{-(-2)}{1} = 2$

2 × ميل العمودي = -1

اذاً ميل العمودي = $\frac{-1}{2}$

الان نعوض بالنقطة والميل :

$Y+4=\frac{-1}{2}(x-2)$ **ثم نبسط**

$$y=\frac{-1}{2}-3$$

٢٨- ***مركز الدائرة*** $\left(\frac{-\text{معامل}\,x}{2},\frac{-\text{معامل}\,y}{2}\right)$

معامل **x = 4** ***و معامل*** **y = -6**

$$\left(\frac{-4}{2},\frac{-(-6)}{2}\right)=(-2,3)$$

٢٩- ***القانون :*** $\frac{x(x-3)}{2}=\frac{123(123-3)}{2}$

$$=\frac{123\times120}{2}=7380$$

٣٠- **زاوية مضلع منتظم =** $\frac{(x-2)\times180}{x}$

حيث **x** ***عدد الاضلاع.***

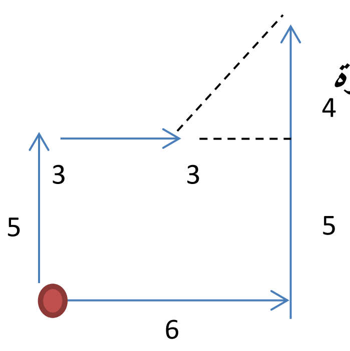
$$\frac{180x-360}{x}=108 \quad >> x=5$$

٣١- بما ان شبه المنحرف لديه ضلعان متوازيان و احد زوايا ه قائمة فإن الزاوية الأخرى المقابلة لها قائمة ايضا:

ومجموع زوايا الرباعي 360 فإن

A+70+90+90=360 >>>> A =110

٣٢- بعد رسم طريقة سيرهم نوصل النقطتين الأخيرة فيتكون لنا مثلث قائم الزاوية ضلعيه معلومين



نستنتج الضلع الثالث بنظرية فيثاغورس

$$3^2+4^2=x^2$$

$$9+16=x^2$$

$$x=5$$

-٣٣

$$\frac{(\sin x)^2-\sin x\cos x+(\cos x)^2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)+(\cos x)^2}{\sec x}=$$

$$\frac{(\sin x)^2-\sin x\cos x+\sin x\cos x+(\cos x)^2}{\sec x}=$$

$$\frac{(\sin x)^2+(\cos x)^2}{\sec x}=\frac{1}{\sec x}=\cos x$$

-٣٤ *طول ضلع المعين* $=\sqrt{\left(\frac{16}{2}\right)^2+\left(\frac{12}{2}\right)^2}=$

$$\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=10$$

المحيط مجموع الأضلاع : 40

-٣٥ *في أي مثلث مجموع أي ضلعين اكبر من الضلع الثالث*

$$x<y+z\quad\rightarrow\quad x-z<y$$

-٣٦ نحسب المساحة الجانبية للبناء (متوازي مستطيلات) =

الارتفاع× محيط القاعدة= $5\times2(8+12)=200\ m^2$

نحسب مساحة الباب والنوافذ لحذفها (لإنها لن تطلى)

$5+10(1.5)=20$ ، الان نحذف مساحة الباب والنوافذ من المساحة الكلية :

$200-20=180\ m^2$ ، ثم انحسب عدد اللترات لطلاء $180\ m^2$ ،

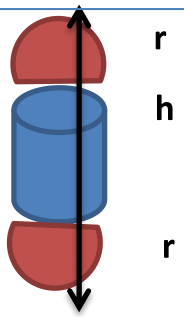
نقسم المساحة المطلوبة على ما يدهنه لتر واحد

$$=\frac{180}{1.5}=120\ L$$

-٣٧ نضع المعادلة على الصورة القياسية: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

نستنتج ان $a^2=4\quad\rightarrow a=2$

المحور الاكبر $4=2a$

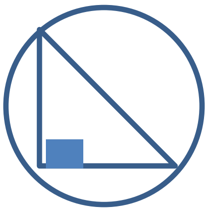


-٣٨ الارتفاع الجديد هو ارتفاع الاسطوانة + طول قطر الكرة

R + h + r = h + 2r

٣٩- نفرض ان r هو نصف القطر

$$\pi r^2 = 16\pi \ , \ \ r = 4$$



طول وتر المثلث = هو قطر الدائرة = $2r$ = 8

وارتفاع المثلث هو نصف القطر

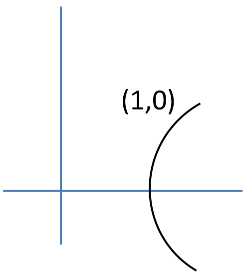
المساحة = نص القطر × الارتفاع

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$$

٤٠- الرأس $(h,k) = (1,0)$ محور القطع هو x

فتحة القطع الى اليمن اذا الاشارة موجبة .

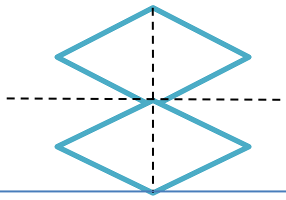
$$(y-0)^2 = (x-1) \ \rightarrow y^2 = x-1 \rightarrow x = y^2 + 1$$



٤١-

محور التناظر هو المستقيم الذي يقسم الشكل

الى جزئين متطابقين . إذا" الحل : 2



٤٢- مساحة المثلث (القاعدة × الارتفاع) ÷ 2 :

مساحة المثلث الاول $\frac{xy}{2}$ ، مساحة المثلث الثاني $\frac{16xy}{2}$

النسبة بينهم :

$$\frac{16xy}{2} \div \frac{xy}{2} \ \rightarrow \ \frac{16xy}{2} \times \frac{2}{xy} \ \rightarrow \ \frac{16xy}{xy} = 16$$

٤٣- لكل ٢سم ،،٦٠٠كلم

إذا" لكل ١سم ،،٣٠٠كلم

١سم	٣٠كلم
٩سم	٩×٣٠= ٢٧٠ كلم

٤٤- انعكاس (a,b) حول محور y $\leftarrow$ $(-a,b)$

دوران $(-a,b)$ بزاوية 90 $\leftarrow$ $(-b,-a)$

٤٥- نجعل المعادلة على الصورة الرئيسية : لقطع مكافئ رأسي (لأن x تربيع)

$$(x-h)^2 = 4c(y-k)$$

$x^2 + x = 1 - y$ ثم نحل المعادلة التربيعية بإكمال المربع :

نضيف للطرفين $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{4}\right) = 1 - y + \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{4}\right) = -y + \left(\frac{4+1}{4}\right)$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = -y + \frac{5}{4}$$

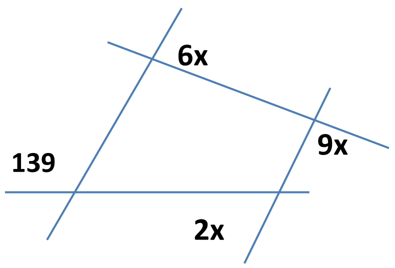
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -y + \frac{5}{4}$$

$$\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = -\left(y-\frac{5}{4}\right)$$

اصبحت على الصورة الرئيسية إذا" الرأس هو $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

٤٦- راديان يساوي : $5 = \frac{180}{3.14} = \frac{180}{\pi}$

٤٧-



مجموع الزوايا الخارجية لرباعي =360

139+6x+9x+2x=360

17x = 360 – 139

x = 221 ÷17

x=13

☼

المستوى 2

المعيار : الخامس والسادس والسابع

المعيار	المؤشرات
المعيار ٣. ٤. ٥: يتعرف مفاهيم الإحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها	١. يجمع البيانات ويمثلها بشكل مناسب(الجداول، القطاعات الدائرية، المدرج الإحصائي) ويحللها ويفسرها ٢. يتعرف الدراسات المسحية, وأنواع العينات ويستعملها في التنبؤ ٣. يحسب مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمجموعة من البيانات ٤. يتعرف مسلمات الاحتمال ومفاهيمه الأساسية (الاستقلال, التنافي, التوزيع المنفصل والمتصل,...) ويحل مسائل عليها ٥. يحسب معاملات الارتباط ويفسرها ٦. يحل مسائل تطبيقية على الإحصاء والاحتمالات
المعيار ٣. ٤. ٦: يتعرف الرياضيات المتقطعة وتطبيقاتها	١. يتعرف الأنماط ويمثلها و يحللها و يعممها ٢. يتعرف مبادئ العد, والتباديل والتوافيق, ونظرية ذات الحدين ٣. يتعرف أساسيات نظرية الأشكال ٤. يحل مسائل تطبيقية على التلوين والأشكال وطرق العد
المعيار ٣. ٤. ٧: يتعرف المنطق والاستدلال الرياضي	١. يتعرف التقرير الرياضي وقيم الصواب وأدوات الربط وينشئ جداولها ٢. يتعرف الاقتضاء والتكافؤ والقياس المنطقي ٣. يتعرف طرائق البرهان المختلفة واستخداماتها

المستوى 1

المعيار٣. ٣. ٥، يتعرف مفاهيم الاحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها.	١. يجمع البيانات ويمثلها بشكل مناسب (الجداول، القطاعات الدائرية، المدرج الاحصائي.......) ويحللها ويفسرها. ٢. يتعرف الدراسات المسحية، وأنواع العينات ويستعملها في التنبؤ. ٣. يحسب مقاييس النزعة المركزية والتشتت لمجموعة من البيانات. ٤. يبين مفهوم التباديل والتوافيق ويحل مسائل عليها. ٥. يشرح المفاهيم الأساسية في الاحتمالات (مبادئ العد، مفهوم الاستقلال، الحوادث المتنافية) ويحل مسائل عليها. ٦. يحل مسائل تطبيقية على الاحصاء والاحتمالات.
المعيار٣. ٣. ٦، يتعرف المنطق والاستدلال الرياضي	١. يتعرف التقرير الرياضي وقيم الصواب وأدوات الربط وينشئ جداولها. ٢. يتعرف الاقتضاء والتكافؤ والقياس المنطقي. ٣. يتعرف طرائق البرهان المختلفة واستخداماتها.

المدرج التكراري : تمثيل بياني يعرض البيانات العددية منظمة في فئات متساوية .

مثال : تظهر البيانات المجاورة الزمن الذي استغرقه كل طالب في ممارسة الرياضة ، اختر فئات مناسبة لتكوين جدول تكراري يمثل هذه البيانات ؟

مدة التدريب الرياضي (دقيقة)				
١٣٥	٨٩	١٤٢	٢١٩	٦
١٤٤	١٠٤	١٣٥	٩٤	٥
١٠٦	١٢٧	١٣٤	١١٦	١
١١٨	١٣٨	١١٨	١١٠	١

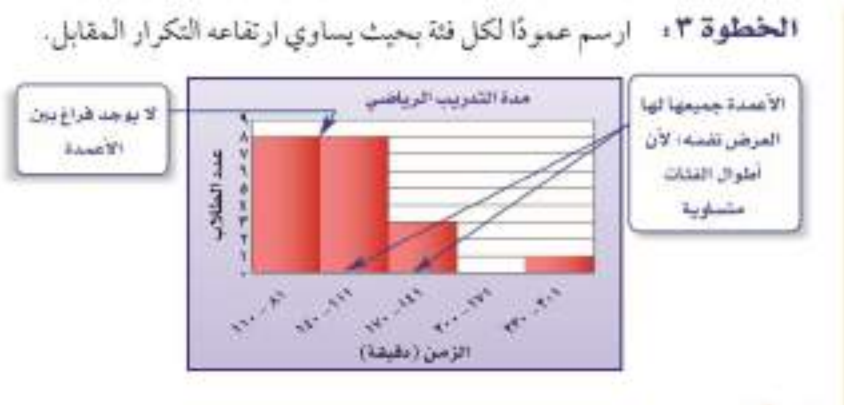
مدة التدريب الرياضي (دقيقة)		
الزمن	الإشارات	التكرا
٨١ – ١١٠	~~IIII~~ III	٨
١١١ – ١٤٠	~~IIII~~ III	٨
١٤١ – ١٧٠	III	٣
١٧١ – ٢٠٠		٠
٢٠١ – ٢٣٠	I	١

مدة اقصر تدريب 89 دقيقة والاطول 219 ، ويبين الجدول المجاور تمثيل البيانات بفئات بطول 30 دقيقة ..

لإنشاء المدرج التكراري نتبع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى : نرسم المحور الافقي والرأسي ونسمهما

الخطوة الثانية : نقسم المحور الأفقي بحسب الفئات في الجدول التكراري



تحليل البيانات وتفسيرها :

مثال : كم عدد القوارب التي ابحر كل منها 400 دقيقة على الاقل ؟

هناك خمسة قوارب ابحر كل منها ما بين (400-499) دقيقة .

وهناك قاربان ما بين (500-599) لذلك :

5+2=7 ... 7 قوارب ابحرت 400 دقيقة على الاقل

مثال : ما نسبة القوارب التي ابحرت 199 دقيقة على الاكثر؟

مجموع القوارب : 17++4+1+5+2=29 وعدد القوارب التي ابحرت 199 دقيقة فأقل 17+4=21 ،،،،

من قانون النسبة المئوية : $\text{النسبة} = \frac{\text{الجزء}\times 100}{\text{الكل}} = \frac{2100}{29} = 72\%$

القطاعات الدائرية : تستعمل لمقارنة اجزاء من البيانات بمجموعة البيانات كلها حيث تمثل الدائرة جميع البيانات وبذلك فإن مجموع النسب في القطاعات الدائرية يساوي 100%

تمثيل النسب المئوية بالقطاعات الدائرية :

نمثل المعلومات في الجدول التالي بالقطاعات الدائرية :

توزيع السكان في مناطق المملكة العربية السعودية	
المنطقة	النسبة المئوية
مكة المكرمة	٢٥,٥٪
الرياض	٢٥٪
المنطقة الشرقية	١٥,١٪
عسير	٧٪
المدينة المنورة	٦,٦٪
جازان	٥٪
باقي مناطق المملكة	١٥,٨٪

الخطوة الاولى: نعلم ان الدائرة 360 درجة (عدد ثابت دائما")

ولكي نحصل عى زاوية القطاع نضرب تكرار الفئة في 360

ثم نقسم الناتج على التكرار الكلي ونقرب الجواب لعدد صحيح

(اذا كان السؤال عن النسبة المئوية فإن التكرار الكلي لها هو 100)

قطاع مكة : $\frac{25,5\times360}{100}\approx 92$ ، قطاع الرياض: $\frac{360\times25}{100}=90$

قطاع الشرقية : $\frac{360\times15,1}{100}\approx 54$ ، قطاع عسير: $\frac{360\times7}{100}\approx 25$

قطاع المدينة : $\frac{360\times6,6}{100}\approx 24$ ، قطاع جازان : $\frac{360\times5}{100}=18$

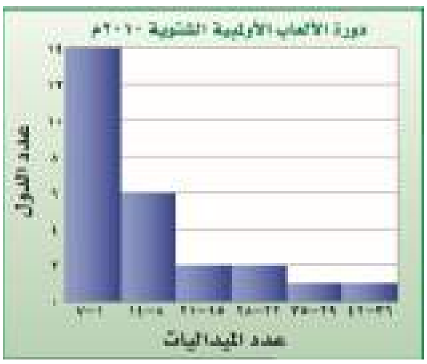
قطاع باقي سكان المملكة : $\frac{360\times15,8}{100}\approx 57$

توزيع السكان في المناطق الإدارية في المملكة

الخطوة الثانية: نستعمل الفرجار لرسم الدائرة ونستعمل المنقلة لرسم الزاوية المطلوبة ونستعمل نصف القطر الجديد لرسم الزاوية الاخرى ونكرر العملية حتى الانتهاء ونسمي كل قطاع .

تحويل من مدرج تكراري الى قطاع دائري :

مثال : مثل البيانات المعطاة في المدرج التكراري المجاور بالقطاعات الدائرية.



الخطوة الأولى: نوجد العدد الكلي للدول : 14+6+2+2+1+1=26

الخطوة الثانية :نوجد النسبة المئوية التي تقارن عدد الميداليات في كل فئة بالعدد الكلي للدول ، وقدر النتيجة إلى اقرب جزء من مئة .

من 1-7 : $\frac{14}{26}\approx 0,54$ ، من 8-14: $\frac{6}{26}\approx 0,23$

من 15-21: $\frac{2}{26}\approx 0,08$ ، من 22-28: $\frac{2}{26}\approx 0,08$

من 29-35: $\frac{1}{26}\approx 0,04$ ، من 36-42: $\frac{1}{26}\approx 0,04$

الخطوة الثالثة : نستعمل النسب لإيجاد زاوية كل قطاع ونقرب.

من 1-7: $0,54 \times 360 \approx 191$

من 8-14: $0,23 \times 360 \approx 83$

من 15-21: $0,08 \times 360 \approx 29$

من 22-28: $0,08 \times 360 \approx 29$

من *29-35*: $0,04 \times 360 \approx 14$

من 36-42: $0,04 \times 360 \approx 14$

الخطوة الرابعة نستعمل الفرجار والمنقلة لرسم كل قطاع

تحليل البيانات وتفسيرها :

❖مثال :استعمل الشكل المجاور لتصف كيف تقضي سارة يومها كاملا"

نعلم ان اليوم الواحد به 24 ساعة ، ويبين التوزيع في الشكل انه بالنسبة المئوية

نلاحظ ان المدرسة تقضي بها 25% وهي تساوي الربع

و ربع 24 هو 6 ساعات إذا" تقضي في المدرسة 6 ساعات

اما النوم 33,3% وهو يساوي الثلث (ثلث المئة) ،،

ثلث 24 هو 8 ، تقضي في النوم 8 ساعات .

الترفيه 12,5% إذا لم تتوضح النسبة بسهولة نستخدم

قانون النسبة لإيجاد الجزء حيث ان الكل هو 24) :

$3 = \frac{12,5 \times 24}{100}$ **تقضي في الترفيه 3 ساعات**

والوقت نفسه للنشاطات الاخرى لأنها نفس النسبة.

الواجبات المنزلية لم يذكر لنا النسبة !

نجمع عدد ساعات جميع الاعمال الاخرى وننقصها من عدد ساعات اليوم الكلية .

$$8+6+3+3+x=24 \quad \rightarrow 20+x=24 \quad \rightarrow \quad x=24-20 \quad \rightarrow x=4$$

الواجبات المنزلية 4 ساعات

الدراسات المسحية :

مفهوم أساسي — أساليب جمع البيانات — أضف إلى مطويتك

الأسلوب	التعريف/ الاستعمال	مثال
الدراسة المسحية	• تؤخذ البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع. • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول المجتمع.	لتحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالبًا عن رأيهم في فقرات الإذاعة.
الدراسة القائمة على الملاحظة	• تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة. • لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلى استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تراقب شركة لصناعة الدمى بعض الأطفال وهم يلعبون، وتلاحظ نوع الدمى التي يفضلونها أكثر. ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر السنتين يفضلون الدمى التي تصدر أصواتًا على تلك التي لا تصدر أصواتًا.
التجربة	• تُسجل البيانات بعد تغيير العينة • للتوصل إلى استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثةٍ ما.	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات، فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة.

أساليب المعاينة : تُستعمل بيانات العينة لتقدير إحدى سمات المجتمع كاملًا. وتُختار العينة العشوائية من المجتمع على أن تكون ممثلة له دون إعطاء أفضلية لفئة معينة على أخرى. ويعرض الجدول الآتي ثلاثة أنواع من العينات العشوائية:

مفهوم أساسي — العينات العشوائية — أضف إلى مطويتك

النوع	التعريف	مثال
العينة العشوائية البسيطة	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخرى من المجتمع.	سحب أرقام مئة طالب من كيس وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى فئات متماثلة غير متداخلة، ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناء على النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة؛ ليعكس التنوع في صفوف المدرسة.
العينة العشوائية المنتظمة	العينة التي يُختار أفرادها تبعًا لزمن معين أو فترة زمنية محددة.	تُفحص قطعة من خط إنتاج كل عشر دقائق، أو تُفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة.

العينات المتحيزة ملخص المفهوم

النوع	الوصف	مثال
العينة الملائمة	تتكون العينة الملائمة من أفراد المجتمع الذين يسهل الوصول إليهم.	لتمثيل جميع الطلاب الملتحقين بالمدرسة يتم اختيار أحد فصول المدرسة لإجراء الدراسة.
العينة التطوعية	تتكون العينة التطوعية من أفراد يرغبون في الانضمام إلى العينة.	يقوم طلاب المدرسة الراغبون في إبداء آرائهم بتعبئة استبانة الدراسة الإحصائية على شبكة المعلومات.

مثال من واقع الحياة استعمال العينات في التنبؤ

النوع	العدد
ألعاب إلكترونية	٢٥
دراجات هوائية	١٠
أحذية تزلج	٨
ألعاب ذهنية	٧

مخازن: يبيع أحد المخازن أربعة أنواع رئيسة من الألعاب، ولمعرفة نوع الألعاب المفضلة قام موظفو المخزن بدراسة إحصائية على ٥٠ زبونًا عشوائيًّا، فكانت النتائج كما في الجدول المجاور، فإذا أراد المخزن طلب ٤٥٠ لعبة جديدة، فكم يفضل أن يكون عدد الألعاب الإلكترونية؟

أولًا: حدد ما إذا كانت العينة ممثلة للمجتمع أم لا، العينة هنا عشوائية بسيطة؛ لأنه تم اختيار الزبائن عشوائيًّا لذلك فإن العينة ممثلة.

ثانيًا: نسبة الزبائن الذين يفضلون الألعاب الإلكترونية = $\frac{٢٥}{٥٠}$ = ٥٠٪؛ لذا أوجد ٥٠٪ من ٤٥٠.

٠,٥ × ٤٥٠ = ٢٢٥، فيكون على المخزن طلب ٢٢٥ لعبة إلكترونية تقريبًا.

مقاييس النزعة المركزية :

ملخص المفهوم — مقاييس النزعة المركزية — أضف إلى مطويتك

النوع	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المتوسط الحسابي	مجموع البيانات مقسوما على عددها.	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المرتبة.	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.	عندما يوجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال : إذا كانت اعمار مجموعة من الموظفين بالسنوات هي : 22,18,24,32,24,18 فاحسب المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه البيانات ؟

المتوسط الحسابي : $\frac{22+24+18+32+24+18}{6} = \frac{138}{6} = 23$

الوسيط : $32, 24, 24, 22, 18, 18$ نرتب الاعداد تصاعديا

الوسيط $\frac{24+22}{2} = \frac{46}{2} = 23$

المنوال : يوجد منوالان هما 24 , 18

مثال : 8 اعداد متتالية متوسطهم 16 فما متوسط اول اربعة اعداد ؟

بما انها متتالية إذاً" كل عدد يزيد عن العدد الذي يليه برقم واحد ، نفرض ان العدد الاول هوx إذاً سيكون الثاني x+1 والثالث x+2 وهكذا .... نوجد الأعداد اولاً :

$$\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)}{8} = 16$$

$$\rightarrow \frac{8x+28}{8} = 16 \quad \rightarrow \quad 8x+28 = 8\times 16 \quad \rightarrow 8x = 128-28$$

$$\rightarrow \quad 8x = 100 \quad \rightarrow \quad x = \frac{100}{8} \quad \rightarrow \quad x = 12,5$$

العدد الاول هو : *12,5* ، الثاني: *13,5* ، الثالث: *14,5* ، الرابع: *15,5*

متوسط الاعداد الاربعة الاولى : $\frac{12,5+13,5+14,5+15,5}{4} = \frac{56}{4} = 14$

مقاييس التشتت : تستعمل لوصف مدى انتشار البيانات حول القيم المتوسطة .

مفهوم أساسي **مقاييس التشتت** أضف إلى مطويتك

المقياس	الوصف	متى يفضل استعماله؟
المدى	الفرق بين أكبر وأصغر قيمة في مجموعة البيانات.	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.
الربيعات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من مجموع البيانات.
المدى الربيعي	مدى النصف الأوسط من مجموعة البيانات؛ وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات.

مقاييس التشتت. **الربيعات** قيم تعمل على تقسيم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية، وتُعد من مقاييس التشتت أيضًا. وكما تذكر فإن الوسيط يقسم البيانات إلى قسمين متساويين.

النصف الأدنى: ١٩٣١٩، ٤٦١١٥، ٩٨٣١٣ — الوسيط — النصف الأعلى: ١٠٩٤٨٢، ٢٤٨٩٦٩، ٣٧٥٧٦٦

وسيط النصف الأدنى من البيانات يُسمى **الربيع الأدنى**.

وسيط النصف الأعلى من البيانات يُسمى **الربيع الأعلى**.

مثال : اوجد مقاييس التشتت للبيانات في الجدول المجاور .

123	139	85
85	20	24
204	41	

المدى:= $204 - 20 = 184$

لإيجاد الوسيط والربيع الادنى والاعلى نرتب البيانات تصاعديا":

$$20 \quad \underbrace{24,\ 41}_{\text{الربيع الأدنى}},\quad \underbrace{85,\ 85}_{\text{الوسيط}},\quad \underbrace{123,\ 139}_{\text{الربيع الأعلى}},\quad 204$$

$$\frac{41+24}{2} = 32{,}5 \quad ، \quad \frac{85+85}{2} = 85 \quad ، \quad \frac{139+123}{2} = 131$$

الوسيط : 85 ، الربيع الادنى : 32,5 ، الربيع الأعلى: 131

المدى الربيعي = الربيع الأعلى – الربيع الادنى = 131 – 32,5 = 98,5

تعد البيانات التي تقل عن المقدار: (الربيع الأدنى – (1,5× المدى الربيعي))
والتي تزيد عن على المقدار : (الربيع الأدنى + (1,5× المدى الربيعي))

والقيم المتطرفة : هي البيانات التي تزيد أو تقل كثيراً عن قيمة الوسيط .

مساكن: أوجد القيم المتطرفة في بيانات الجدول أدناه.

أوجد المدى الربيعي:

١٢٦٩٥ − ٨٨٦٥ = ٣٨٣٠

اضرب المدى الربيعي بـ ١,٥:

١,٥ × ٣٨٣٠ = ٥٧٤٥

لإيجاد القيم المتطرفة اطرح ٥٧٤٥ من الربيع الأدنى، وأضف ٥٧٤٥ إلى الربيع الأعلى:

٨٨٦٥ − ٥٧٤٥ = ٣١٢٠

١٢٦٩٥ + ٥٧٤٥ = ١٨٤٤٠

وبذلك تكون القيمة المتطرفة الوحيدة هي ١٨٥٣٣؛ لأنها أكبر من ١٨٤٤٠

توزيع المساكن المشغولة في ٦ محافظات في منطقة الباحة

المحافظة	المساكن المشغولة	
الباحة	١٨٥٣٣	
بلجرشي	١٢٦٩٥	← الربيع الأعلى
المخواة	١٢٥٧٣	
قلوة	٩٩١٧	← الوسيط
المندق	٨٨٦٥	← الربيع الأدنى
العقيق	٦٣٢٣	

المصدر: مصلحة الإحصاءات العامة والمعلومات لعام ١٤٣١هـ

الانحراف المتوسط : متوسط اليم المطلقة بين كل قيمة و المتوسط الحسابي للبيانات

مفهوم أساسي — **الانحراف المتوسط** — أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي.

الخطوة ٢: أوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي.

الخطوة ٣: اقسم هذا المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات.

استعمال الانحراف المتوسط:

سأل معلم طلابه عن عدد الروايات التي يقرؤونها اسبوعياً، وقد تلقى الاجابات التالية: 2,2,3,4,14 ، اوجد الانحراف المتوسط لهذه البيانات،مقرباً الى اقرب جزء من عشرة.

- **نحسب المتوسط الحسابي :** $\frac{14+4+3+2+2}{5} = \frac{25}{5} = 5$
- **نوجد مجموعة القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي**

$$|5-2| + |5-2| + |5-3| + |5-4| + |5-14| =$$

$$3+3+2+1+9 = 18$$

- **نقسم المجموع على عدد القيم :** $\frac{18}{5} = 3,6$

- **الانحراف المعياري :هو القيمة التي تحسب لتدل على مدى تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي .**
- **التباين : مجموعة من البيانات فهو مربع الانحراف المعياري لتلك البيانات .**

ملخص المفهوم التباين والانحراف المعياري

أضف إلى مطويتك

الخطوة ١: أوجد المتوسط الحسابي $\bar{س}$.

الخطوة ٢: أوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات واقسم المجموع على عدد القيم في مجموعة البيانات لتحصل على التباين.

الخطوة ٣: أوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

إيجاد التباين والانحراف المعياري :

أوجد المتوسط الحسابي، والتباين والانحراف المعياري مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة للأعداد ٣، ٦، ١١، ١٢، ١٣.

الخطوة ١: لإيجاد المتوسط الحسابي اجمع قيم البيانات ثم اقسم المجموع على عددها.

$$\bar{س} = \frac{٣ + ٦ + ١١ + ١٢ + ١٣}{٥} = \frac{٤٥}{٥} = ٩$$

الخطوة ٢: لإيجاد التباين أوجد مربع الفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي، ثم اجمع هذه المربعات واقسم المجموع على عدد القيم.

$$ع^٢ = \frac{(٣ - ٩)^٢ + (٦ - ٩)^٢ + (١١ - ٩)^٢ + (١٢ - ٩)^٢ + (١٣ - ٩)^٢}{٥}$$

$$= \frac{(-٦)^٢ + (-٣)^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢}{٥}$$

$$= \frac{٣٦ + ٩ + ٤ + ٩ + ١٦}{٥} = \frac{٧٤}{٥}$$

الخطوة ٣: الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين.

$ع^٢ = \frac{٧٤}{٥}$ التباين

$\sqrt{ع^٢} = \sqrt{\frac{٧٤}{٥}}$ أوجد الجذر التربيعي لكلا الطرفين

$ع = ٣,٨$ استعمل الحاسبة

إذن المتوسط الحسابي ٩، والتباين $\frac{٧٤}{٥}$ ، والانحراف المعياري ٣,٨ تقريبًا

مفهوم أساسي قانونا الانحراف المعياري

العينة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث n عدد قيم العينة، وَ $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة وَ x_k قيم العينة.

المجتمع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

حيث n عدد قيم المجتمع، وَ μ المتوسط الحسابي للمجتمع وَ x_k قيم المجتمع.

مثال 3 من واقع الحياة الانحراف المعياري

درجات اختبار: حصل طلاب المعلم صالح في اختبارين متتالين على المتوسط نفسه في اختبار الرياضيات وهو 75. إذا علمت أن درجات الاختبارين كما يأتي:

الاختبار A	الاختبار B
85, 80, 75, 75, 70, 75, 75, 65, 75, 75, 75, 80, 75, 75, 70, 80, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 75	100, 100, 90, 10, 100, 95, 10, 95, 100, 100, 85, 15, 95, 20, 95, 90, 100, 100, 90, 10, 100, 100, 25

a) بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات الاختبار A.

الخطوة 1 بما أن الاختبار طُبّق على جميع طلاب الفصل، ولم تكن درجات هؤلاء الطلاب عينة من درجات مجموعة كبيرة من الطلاب طُبّق عليها الاختبار، فإن المتوسط 75 يمثل متوسط المجتمع. ومن هنا فإن: $\mu = 75$.

الخطوة 2 أوجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}} \quad \text{قانون الانحراف المعياري}$$

$$= \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \ldots + (75-75)^2 + (75-75)^2}{23}}$$

$$\approx 3.9$$

المتوسط لدرجات الاختبار A يساوي 75، والانحراف المعياري يساوي تقريبًا 3.9

مفهوم أساسي هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنه يمكن تقريب هامش خطأ المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

في دراسة مسحية شملت 2142 شخص ، أفاد 58% منهم ان كرة القدم لعبتهم المفضلة

- **ماهو هامش الخطأ في المعاينة ؟**

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2148}} = \pm 0,0216$$

، **إذا" هامش الخطأ تقريباً 2,16%**

- **مالفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الذين افادو ان كرة القدم لعبتهم المفضل؟**

$$58\% - 2.16\% = 55.84\% \quad , \quad 58\% + 2.16\% = 60.16\%$$

نسبة المجتمع الذين افادوا ان كرة القدم لعبتهم المفضلة تقع بين (60.16% , 55.85%)

الاحتمـــالات :

تمثيل فضاء العينـة : في مباريات كرة القدم ، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة ، ليحدد أي الفريقين سيحتار المكان في الملعب ، وقد تكون النتيجة شعار او كتابة .

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

مثال : القيت قطعة نقد مرتين ، اوجد فضاء العينة .

جميع الاحتمال الممكنة هي *4* احتمالات :

(الرمية الاولى، الرمية الثانية) :

(صورة ، صورة) (صورة ، شعار)

(شعار، صورة) (شعار ، شعار)

يوجد *4* احتمالات .

مثال :مطعم يبيع شطائر اللحم بثلاثة احجام صغير كبير وسط ،بالجبن والطماطم والمخلل او باثنين او بأحدهما او بدون .

مثل فضاء العينة لأنواع الشطائر الممكنة ؟

تتكون التجربة من *4* مراحل:

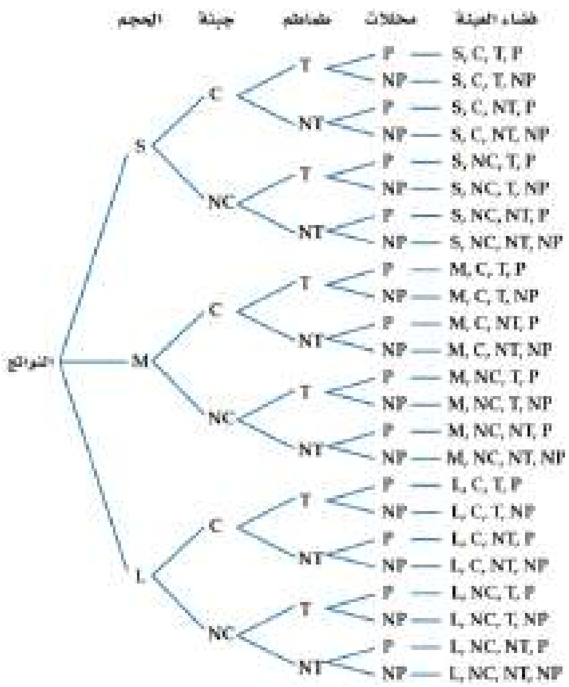
- اختيار حجم الشطيرة *s,m,l*
- اختيار الجبن (مع *c*، بدون *nc*)
- الطماطم (مع *t* ، بدون *nt*)
- المخلل (مع *p* ، بدون *np*)

ننشئ الرسم الشجري

.

.

يوجد *24* احتمال للشطائر



نلاحظ ان الحل السابق سيأخذ الكثير من الوقت فهو غير عملي ،،،لذلك سنستعمل مبدأ العد الاساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة .

مفهوم أساسي **مبدأ العدّ الأساسي**

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

⋮

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$

❖في السؤال السابق عن المطعم يمكن ايجاد الحل باستعمال مبدأ العد الاساسي ..

المرحلة الاولى 3 ، الثانية 2 ، الثالثة 2 ، الرابع 2 : $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$

❖في مستشفى 5 ابواب ، كم عدد الطرق المختلفة لدخول 3 اشخاص للمستشفى ؟

الاول : 5 طرق للدخول ، والثاني لديه 5 طرق والثالث 5 طرق

إذا باستعمال مبدأ العد : 5×5×5 = 125 لدخولهم

❖رمي مكعب مرقم 4 مرات ، اوجد عدد النواتج الممكنة .

المكعب يحوي 6 ارقام . بمعنى في كل مرة هناك 6 احتمالات من الممكن ان تظهر

والمرة الثانية 6 ..... والرابعة 6 ،، إذا" الحل: $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

❖يريد سعد شراء ثوب من بين البدائل المبينة في الجدول .. فما عدد الخيارات المتاحة ؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الاكمام	3
القبة	3
الفتحة الامامية	2
الازرار	2

نستعمل مبدأ العد :

$5 \times 6 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 1080$

لدى سعد *1080* خيار ممكن

الاحتمال مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كانت النواتج لها إمكانية الحصول نفسها، فإن احتمال حادثة هو نسبة عدد النواتج في الحادثة إلى العدد الكلي للنواتج الممكنة.

الرموز: ح(حادثة) = $\frac{\text{عدد النواتج في الحادثة}}{\text{العدد الكلي للنواتج}}$

العدد الكلي للنواتج = فضاء العينة

ما احتمال الحصول على عدد زوجي عند رمي مكعب ارقام مرة واحدة ؟

$\frac{\text{الاعداد الزوجية}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ **احتمال الحصول على عدد زوجي هو** $\frac{1}{2}$ **او 50%**

يعتزم احمد تنظيم حفل واتفق مع اصدقائه الثلاثة ان من يقدم الحفل هو من سيحصل على اصغر عدد يظهر على مكعب الارقام ، حصل اصدقاؤه على 6,5,2 ما احتمال ان يقدم احمد فقرات الحفل ؟

نواتج رمي المكعب : 6,5,4,3,2,1

لكي يقدم الحفل عليه ان يحصل على 1 فقط ، لان (اقل رقم اخذه اصدقائه 2)

اذا" هناك احتمال واحد :

$\frac{1}{6}$ **وهو حوالي : 17%**

☆

احتمال وقوع حادث ما ، هو عدد بين الصفر والواحد ومن الممكن ان يكون صفر او واحد ، ونلاحظ ان الاحتمالات يمكن تمثيلها بأكثر من شكل(كسر اعتيادي او عشري او نسبة مئوية

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق :

التبديل : تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيــب فيها مهمـــا" .

☼وقف اربعة اصدقاء يوسف علي فراس فهد لالتقاط صورة جماعية ،وهناك اربع خيارات لمن يقف اقصى اليسار وثلاثة للمكان الثاني وخياران للمكان الثالث وخيار للمكان الرابع .

باستعمال مبدأ العد الاساسي يوجد $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ترتيب ممكن لهؤلاء الاصدقاء

❋بكم طريقة يمكن اعادة ترتيب كلمة تقوى ؟ الكلمة من 4 احرف $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

☼يمكن ان تكتب العبارة السابقة على صورة $4!$

مفهوم أساسي — المضروب (أضف إلى مطويتك)

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n.

الرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$، وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$

مثال :نواف وماجد عضوان في فريق رياضي ،إذا كان عدد أعضاء الفريق 20 ويرتدي كل منهم قميصاً مرقماً من 1 الى 20 بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف 1 ، ورقم قميص ماجد 2 ؟

اولاً نوجد فضاء العينة ، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء اعضاء الفريق العشرين و يساوي $20!$

ثم نوجد عدد نواتج الحادثة وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء اعضاء الفريق المتبقية ، إذا كان رقم قميص نواف 1 ، ورقم قميص ماجد 2 ويساوي: $(20-2)! = 18!$

الان نحسب الاحتمال : $\frac{18!}{20!} = \frac{18!}{20 \times 19 \times 18!} = \frac{1}{380}$

☆

بالعودة لسؤال الصورة الجماعية للأصدقاء ، نفرض ان عددهم اصبح 6 ولكن المصور يرغب ان يتم اختيار 4 اشخاص فقط عشوائياً ليظهروا في الصورة . باستعمال مبدأ العد الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 اصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو:

$6 \times 5 \times 4 \times 3$ او 360 ، وهناك طريقة تصف عدد تباديل *6* اصدقاء إذا اختير *4* منهم في كل مرة ويرمز إليها بالرمز $6P_4$

$$6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي الى الصيغة التالية :

قــانون التباديل :

مفهوم أساسي **التباديل** أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nP_r$ حيث

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2 الاحتمال والتباديل

يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًا.
عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي $_{10}P_3$

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسر يساوي $\frac{1}{720}$

سؤال : تستعمل الارقام من 1 الى 9 دون تكرار ، لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل .

- **ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة ؟**

نوجد جميع الاحتمالات الممكنة وهي مضروب 9

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$$

- **اذا اخترت بطاقة جامعية عشوائية فما احتمال ان تحمل أحد الرقمين :**

67953124 ، 42135976 :

$$\frac{2}{362880}$$

⁕ تتكرر احياناً بعض العناصر ، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة نستعمل الصيغة التالية :

مفهوم أساسي **التباديل مع التكرار** أضف إلى مطويتك

عدد التباديل المتمايزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا .... فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

مثال 3 الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟

الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المتمايزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2!\cdot 2!}=\frac{5040}{4}=1260$$ وذلك باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$

مثال : ما احتمال ان يكون 55652113 رقماً لهاتف مكون من 8 ارقام وهي :

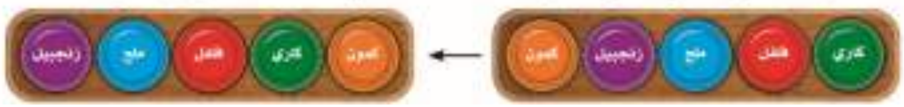
5,1,6,2,1,5,3,5

نلاحظ ان هناك ارقام متكرره وهي : 5 متكرر ثلاث مرات ، 1 متكرر مرتين ، نطبق القانون لايجاد جميع الاحتمالات الممكنة لارقام الهواتف :

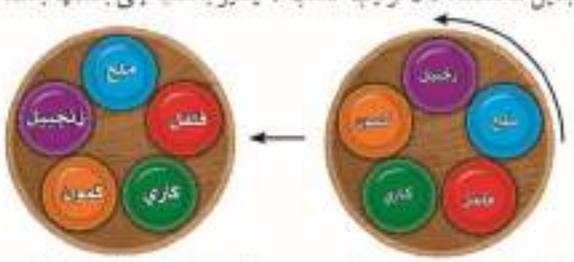
$$\frac{8!}{3!\times 2!}=\frac{40320}{12}=3360$$

هناك ترتيب واحد فقط لهذا الرقم إذاً الحل : $\frac{1}{3360}$

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي !5.



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية**، فإذا وضعت عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما توضع العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5}\cdot 5!=\frac{5\cdot 4!}{5}=4!=(5-1)!$$

مفهوم أساسي التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى مرجع ثابت (نقطة او موقع يحدد مسبقاً في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى ترتيبات ستعامل خطياً وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$

مثال 4 الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

a) **زينة،** إذا رُتِّبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجع ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن

احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

b) **طعام،** جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجع ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6.

لذا، فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

❋مثال تجمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعب على شكل حلقة للتشاور قبل المباراة:

- **ما احتمال ان يقف المهاجم على يمين الحارس مباشرة ،إذا تجمعوا بشكل عشوائي؟**

بما انه لا توجد نقطة مرجع فإنه تبديل دائري $(11-1)! = 10!$

عدد النواتج التي يتكون منها الحدث يساوي عدد تباديل الاعبين التسعة الاخرين في التجمع او $9!$:

احتمال ان يكون المهاجم على يمين الحارس: $\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$

- **إذا وقف الحكم تماماً خلف احدهم فما احتمال وقوف الحكم خلف الحارس ؟**

يوجد مرجع ثابت(الحكم) ،، هذا تبديل خطي ليس دائري ، إذاً" هناك $11!$ طريقة للترتيب ، وعدد النواتج التي تتكون منها الحادثة يساوي عدد تباديل اللاعبين الاخرين العشرة على فرض ان الحكم يقف خلف حارس المرمى أي $10!$ ، ولذا

فاحتمال وقوف الحكم خلف الحارس : $\frac{10!}{11!} = \frac{1}{11}$

التوافيق : تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب **غير مهما**" .

مثال **اختيار موظفين اثنين من بين 6 موظفين لحضور مؤتمر ، ترتيب الموظفين غير مهم لذلك نستعمل توافيق :**

مفهوم أساسي **التوافيق**

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $_nC_r$ ، حيث $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$$_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

مثال 5 **الاحتمال والتوافيق**

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة أي $_{10}C_6$

$$_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210$$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي $_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{_6C_6}{_{10}C_6} = \frac{1}{210}$

مثال : وضعنا في اناء أحرف ممغنطة (تمثل الاحرف الهجائية العربية جميعها) إذا سحبت 5 احرف عشوائياً فما احتمال ان تكون (ب ، هـ ، ع ، ل ، م) ؟؟

- **لا يهم ترتيب إذاً هي توافيق : الاحرف الهجائية 28 حرف ،،**
عدد النواتج الممكنة من سحب 5 احرف هي توافيق 28 مأخوذة 5 كل مرة :

$$28\,C_5 = \frac{28!}{5!\,(28-5)!} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23!}{5! \times 23!}$$

$$= \frac{11793600}{120} = 98280$$

- **احتمال اختيار هذه الاحرف الخمسة بالتحديد هو :** $\frac{1}{98280}$

الاحتمال الهندسى : هو الاحتمال الذي يتضمن قياساً هندسياً مثل الطول او المساحة

مفهوم أساسي — الاحتمال والطول

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$

مثال: إذا اختيرت النقطة E على $\overline{AD}$ عشوائيًا، فإن

$$P(\text{تقع } E \text{ على } \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

احتمال = p

مثال 1 استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًا على $\overline{JM}$، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

$P(\text{تقع } X \text{ على } \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$ احتمال الطول

$= \frac{7}{14}$ $KL = 7 , JM = 3 + 7 + 4 = 14$

$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$ بالتبسيط

مثال : يحضر مقهى الشاي في وعاء سعته 8L وعندما ينخفض مستوى الشاي عن 2L فإن تركيز الشاي يصبح كبيراً ويختلف طعمه .

- **إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي ، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟**

الوعاء سعته 8L ، والاحتمال ان يكون تحت 2L .. إذاً :

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

- **ما احتمال ان يكون مستوى الشاي في وقت ما بين 2 و 3 L ؟**

الطول بين 2 و3 هو لتر واحد فقط ... إذاً :

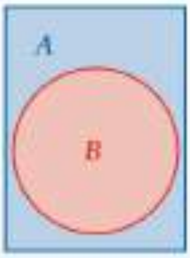
$$\frac{1}{8} = 12.5\%$$

مفهوم أساسي — الاحتمال والمساحة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائياً، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{B \text{ مساحة المنطقة}}{A \text{ مساحة المنطقة}}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائياً في المستطيل A، فإن:

$$P(B \text{ (وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة}) = \frac{B \text{ مساحة الدائرة}}{A \text{ مساحة المستطيل}}$$

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m.

$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \dfrac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$	احتمال المساحة
$= \dfrac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$	$A = \pi r^2$
$= \dfrac{\pi}{9\pi} = \dfrac{1}{9}$	بالتبسيط

احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريباً.

❋ما احتمال ان يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء ؟؟

نوجد مساحة المنطقة الزرقاء : الدائرة الكلية التي نصف قطرها 3 ، ننقص منها الدائرة الثانية(الابيض والاحمر)التي نصف قطرها 2 ، (لكي تتبقى المنطقة الزرقاء)

$\pi 3^2 - \pi 2^2 = 5\pi$ ،،، والان نوجد مساحة المنطقة الزرقاء الى المساحة الكلية .

$$\frac{5\pi}{9\pi} = \frac{5}{9} = 56\%$$

❋ما احتمال ان يهبط في المنطقة البيضاء ؟؟

نوجد مساحة المنطقة البيضاء : الدائرة الثانية التي نصف قطرها 2 ننقص منها الدائرة الحمراء التي نصف قطرها 1 ، (لكي تبقى المنطقة البيضاء) $\pi 2^2 - \pi = 3\pi$

$$\frac{3\pi}{9\pi} = \frac{1}{3} = 33\%$$

مثال : يتكون الهدف في لعبة السهام من 3 دوائر متحدة المركز ، إذا كان قطر الدائرة الداخلية 4cm ويزداد نصف قطر كل دائرة عن الدائرة التي تسبقها ب 3cm ، إذا استقر سهم اللاعب في الهدف ، فما احتمال ان يكون في الدائرة الداخلية ؟؟

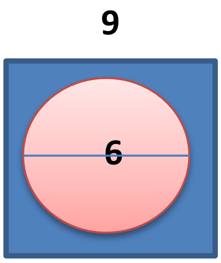
مساحة الدائرة الداخلية هي : $\pi 2^2 = 4\pi$ ،، نوجد مساحة الهدف ككل :

نصف قطر الدائرة الاولى 2 (ويتزايد بمقدار3) ← الثانية 5 ← الثالثة 8 وهي الهدف

مساحة الهدف : $\pi 8^2 = 64\pi$ ،،،

إذاً احتمال ان يكون في الدائرة الداخلية : $\frac{4\pi}{64\pi} = \frac{1}{16} = 6\%$

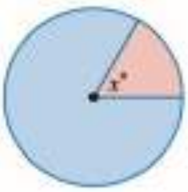
❋سؤال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات ، واختيرت نقطة عشوائياً داخل المربع ،ما احتمال ان تقع ايضاً داخل الدائرة ؟



مساحة المربع : $9 \times 9 = 81$

مساحة الدائرة : $3^2\pi = 9\pi$

احتمال ان تقع داخل الدائرة : $\frac{9\pi}{81} = \frac{\pi}{9}$



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.
إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية $(x°)$ إلى $360°$

مثال 4 استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

قياس زاوية القطاع الأصفر $45°$

P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر) $= \frac{45}{360} \approx 12.5\%$

b) P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

قياس زاوية القطاع البنفسجي $105°$

P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) $= \frac{105}{360} \approx 29\%$

c) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق $50° + 70° = 120°$

P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) $= \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$

الحوادث المستقلة و الغير مستقلة :

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأي حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيّنة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلا صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

مفهوم أساسي احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

مثال 2 من واقع الحياة احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في السيارة، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في الحافلة.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افترض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

$$P(B \cap B) = \underbrace{P(B)}_{\text{السحب 1}} \cdot \underbrace{P(B)}_{\text{السحب 2}} \quad \text{احتمال الحادثتين المستقلتين}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \quad P(B) = \frac{3}{8}$$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**.

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

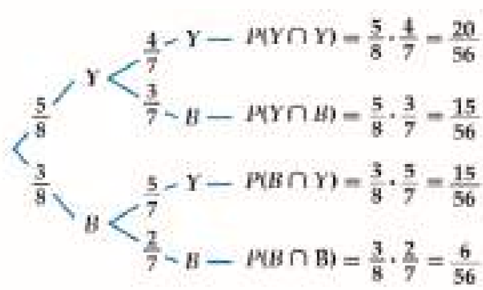
$P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$ احتمال الحادثتين غير المستقلتين

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$ بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق تحقق من صحة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب على طول كل فرع من الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج.

إرشادات للدراسة
- لأي حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1$ ✓

الاحتمال المشروط :

يمكن ايجاد احتمال حادثة مشروطة بإعطاء معلومات اضافية عن وقوع حادثة اخرى وذلك باختزال فضاء العينة ، فمثلاً إذا رمي مكعب مرقم مرة واحدة وعلم ان العدد الظاهر على وجه المكعب فردي فما احتمال ان يكون 5 ؟

هناك3 اعداد فردية لذلك سيختزل فضاء العينة إلى 1,3,5

والاحتمال: $p(5|\text{فردي}) = \frac{1}{3}$

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقمة من 1 إلى 8 عشوائيًا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

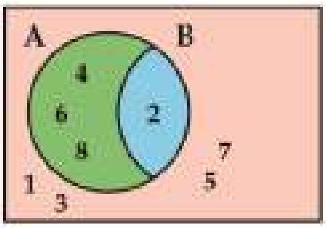
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$　B $\frac{1}{4}$　C $\frac{3}{8}$　D $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

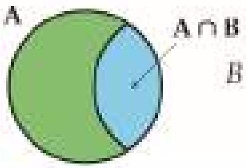
بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي، وأن B حادثة سحب العدد 2 ارسم شكل فن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيّنة، وواحد منها هو 2؛

لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$، والإجابة الصحيحة هي B



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل فن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B

وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

مفهوم أساسي　الاحتمال المشروط

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث $P(A) \neq 0$

احتمالات الحوادث المتنافية :

مثال 1 من واقع الحياة　تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في أعلى الصفحة.

a) المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.

هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

مفهوم أساسي: احتمال الحادثتين المتنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A ، B متنافيتين، فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 2 من واقع الحياة: الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًا أو فيزيائيًا؟

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينيًا أوفيزيائيًا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني

وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي

مجموع الكتب هو $35 = 13 + 12 + 10$.

$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$ احتمال الحادثتين المتنافيتين

$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35}$ $\quad P(A1) = \frac{10}{35}$ ، $P(A2) = \frac{12}{35}$

$= \frac{22}{35}$ بالجمع

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريبًا.

مفهوم أساسي: احتمال حادثتين غير متنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A، B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A، B غير متنافيتين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال 3 من واقع الحياة: الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًا للمشاركة في مسابقة فنية، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًا؟

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

P(لوحة زيتية أو منظر طبيعي) = P(منظر طبيعي) + P(لوحة زيتية) − P(لوحة زيتية و منظر طبيعي)

$= \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30}$ بالتعويض

$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$ بالتبسيط

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

مفهوم أساسي — احتمال الحادثة المتممة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأي حادثة A ، $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

مثال 4 الحادثة المتممة

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A

$P(\acute{A}) = 1 - P(A)$ احتمال المتممة

$= 1 - \frac{20}{300}$ بالتعويض

$= \frac{280}{300} = \frac{14}{15}$ بالطرح و بالتبسيط

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

ملخص المفاهيم — قوانين الاحتمال

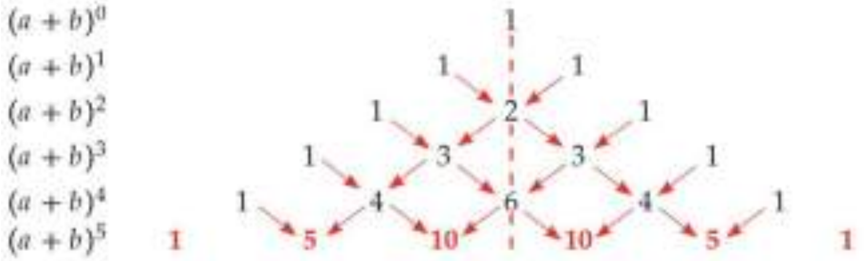
أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	التعريف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إن كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إن كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B ، $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إن كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إن كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثتان المتتامتان	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيِّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A ، $P(A') = 1 - P(A)$

خاص بالمستوى 2

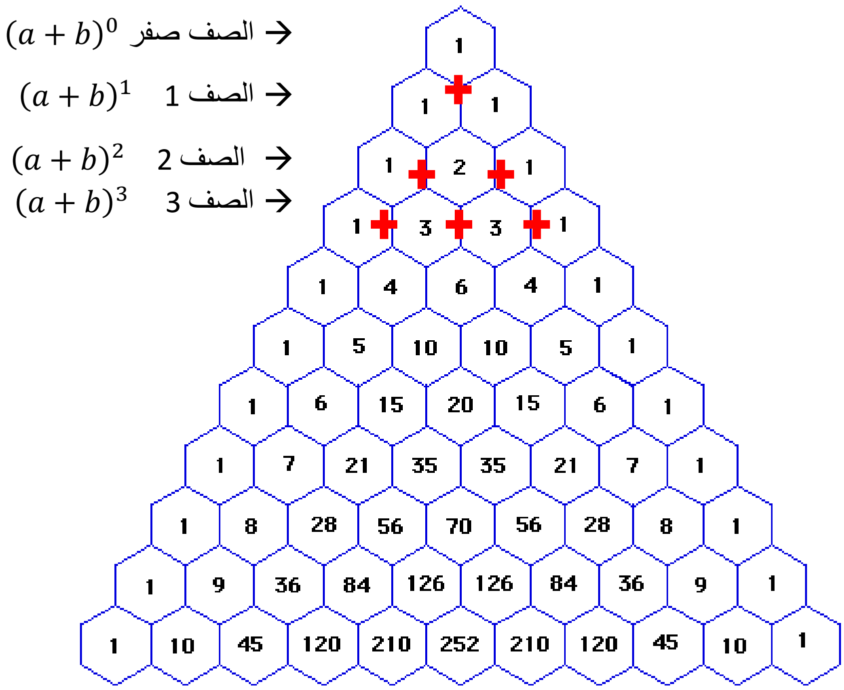
نظرية ذات الحدين :

مثلث باسكال: اكتشف الصينيون في القرن الثالث عشر الميلادي نمطاً من الأعداد سُمِّيَ لاحقًا **مثلث باسكال**. ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.



فعلى سبيل المثال يكون:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$



☼ **مثال : اوجد مفكوك** $(a+b)^8$

اولا نرتب a بأسس تنازلية تبدأ ب 8 ، ثم نرتب b بأسس تصاعدية تنتهي ب 8

$$(a+b)^8 = a^8 + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a^1$$

$$(a+b)^8 = a^8 + a^7b^1 + a^6b^2 + a^5b^3 + a^4b^4 + a^3b^5$$
$$+a^2b^6 + a^1b^7 + b^8$$

ثم نرجع لمثلث باسكال للصف الثامن : ونكتب الأعداد بجانب كل حد

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b^1 + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5$$
$$+ 28a^2b^6 + 8a^1b^7 + b^8$$

خاص بالمستوى 2

نظرية ذات الحدين: يمكن استعمال نظرية ذات الحدين؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدين بدلا من استعمال مثلث باسكال (تذكّر أن: $_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$).

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن:

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق.

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدين.

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + b^7$$
$$= a^7 + \frac{7!}{6!} a^6 b + \frac{7!}{2!5!} a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!} a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!} a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!} a^2 b^5 + \frac{7!}{6!} a b^6 + b^7$$
$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلث باسكال.

6		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7ab^6 + b^7$$

❋ وعندما يختلف معامل الحدين عن 1 مثل $(4x+3y)^5$ فإننا يجب ان نستخدم نظرية ذات الحدين بدلا من باسكال .

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$
$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$
$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280ab^3 + 256b^4$$

خاص بالمستوى 2

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك؛ لذا استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك ذات الحدين ($\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^{k}$) .

مثال 4 إيجاد قيمة حد معيّن

أوجد الحد الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

الخطوة 1: استعمل صيغة مجموع الحدود في مفكوك نظرية ذات الحدين؛ لكتابة المفكوك.

$$(y+z)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^{k}$$

الخطوة 2:

$$\frac{11!}{k!(11-k)!} y^{11-k} z^{k} = \frac{11!}{4!(11-4)!} y^{11-4} z^{4}$$

عند الحد الخامس، تكون $k=4$

$$= 330 y^{7} z^{4}$$

$_{11}C_4 = 330$

مثال : اوجد الحد السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{10!}{k!\,(10-k)!} y^{10-k} c^{k}$$

عند الحد السادس تكون k=5

$$\rightarrow \frac{10!}{5!\,(10-5)!} y^{10-5} c^{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times (5)!} y^{5} c^{5} = 252\, y^{5} c^{5}$$

ملخص المفاهيم — مفكوك ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أس a في الحد الأول هو n، وكذلك أس b في الحد الأخير هو n .
- يقل أس a بمقدار واحد، ويزيد أس b بمقدار واحد في أي حدين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حد يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

الأنمـــاط :

♣**التخمين : التبرير الاستقرائي هو تبرير تستعمل فيه أمثلة محددة للوصول إلى نتيجة ، وتسمى العبارة النهائية التي توصل إليها تخمينـا" .**

مثال :اكتب تخمينا يصف النمط في كل من المتتابعات الاتية ثم استعمله لإيجاد الحد التالي:

مواعيد وصول الحافلات لمحطة الركوب هي : 8:30 صباح ،9:10 صباح 9:50 صباح ، 10:30صباح

الخطوة ١ : نبحث عن نمط ،

8:30 صباح ، 9:10 صباح ، 9:50 صباح ، 10:30صباح ....

40 دقيقة 40 دقيقة 40 دقيقة

الخطوة ٢ : نضع تخمين

يزيد موعد وصول الحافلة اربعون دقيقة عن موعد وصول السابقة . موعد الحافلة التالية سوف يكون 10:30صباح + 40دقيقة = 11:10 صباح .

♣ التخمينات الجبرية او الهندسية : (يجب ان نقدم امثلة)

مثال : ناتج جمع عددين فرديين :

خطوة ١- نكتب امثلة 5+9=14, 3+7=10 , 1+5=6 , 1+3=4

خطوة٢: نبحث عن نمط ، لاحظ ان الأعداد 4,6,10,14 جميعها زوجية .

خطوة٣ : نضع التخمين ، ناتج جمع عددين هو عدد زوجي .

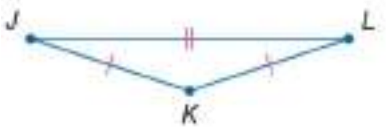
♣إيجاد أمثلة مضادة :

☼ اعط مثالا مضادا يبين أن كلا من التخمينات الآتية خاطئة :

● إذا كان n عدد حقيقي ، فإن $n^2 > n$

إذا كان $n=1$ ، فإن التخمين خاطئ ، لأن $1^2 \ngtr 1$

b) إذا كان $JK = KL$، فإن K منتصف $\overline{JL}$.
عندما لا تقع J, K, L على استقامة واحدة
يكون التخمين خاطئًا. ففي الشكل المجاور $JK = KL$،
ولكن K ليست نقطة منتصف $\overline{JL}$.



المـنـطـق :

العبـــارة هي جملة خبرية إما ان تكون صحيحة أو خاطئة ،وصحة العبارة T ، و خطئها F تسمى قيم الصواب لها و يرمز للعبارة برمز مثل p , q .

P : المستطيل شكل رباعي ، قيمة الصواب T (لان العبارة صحيحة)

$\sim P$: المستطيل ليس شكل رباعي ، قيمة الصواب F (عبارة خاطئة)

يمكن ربط عبارتين باستعمال(و) (أو) لتكوين عبارة مركبة

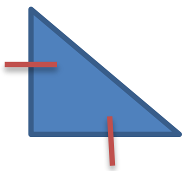
و تسمى العبارة التي تحتوي (و) عبارة وصل وتكون صحيحة عندما تكون جميع العبارات المكونة لها صحيحة وما عداها خاطئة .

و تسمى العبارة التي تحتوي (أو) عبارة فصل وتكون صحيحة عندما تكون أحد العبارات المكونة لها صحيحة ، وخاطئة إذا كانت جميع عباراتها خاطئة .

ملخص المفهوم نفي العبارة، عبارة الوصل، عبارة الفصل — أضف إلى مطويتك

العبارة	التعبير اللفظي	الرموز
نفي العبارة	عبارة تفيد معنى مضادًا لمعنى العبارة الأصلية، وقيمة الصواب لها عكس قيمة صواب العبارة الأصلية.	$\sim p$، وتقرأ ليس p
عبارة الوصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (و).	$p \wedge q$، وتقرأ p و q
عبارة الفصل	عبارة مركبة ناتجة عن ربط عبارتين أو أكثر باستعمال (أو).	$p \vee q$، وتقرأ p أو q

مثال : استعمل العبارات P,Q,R والشكل المجاور لكتابة عبارة الوصل او الفصل ثم اوجد قيمة الصواب لها .



P : في الشكل مثلث

Q:في الشكل ضلعان متطابقان

R:جميع الزوايا حادة

١) $P \wedge R$ (الشكل مثلث وجميع الزوايا حادة) ،
العبارة P صحيحة ، لكن Rخاطئة ، إذا" عبارة الوصل خاطئة .

٢) $Q \vee R$
(في الشكل ضلعان متطابقان او في الشكل جميع الزوايا حادة)،
بما ان احدى العبارتين صحيحة (Q)إذاً عبارة الفصل صحيحة (تكفي واحده صحيحة)

يمكن تنظيم قيم الصواب للعبارات في جداول تسمى **جداول الصواب**. ويمكن استعمال جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لنفي العبارة ولعبارتي الوصل والفصل.

نفي العبارة

p	$\sim p$
T	F
F	T

عبارة الوصل

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ويمكن استعمال الجدول السابق لإنشاء جداول اكثر تعقيد (عبارت مركبة)

إرشادات للدراسة

جداول الصواب: كي يسهل عليك تذكر جداول الصواب لعبارتي الوصل والفصل تذكر ما يأتي:
- عبارة الوصل تكون صحيحة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها صحيحة.
- عبارة الفصل تكون خاطئة فقط إذا كانت جميع العبارات المكونة لها خاطئة.

مثال 3 إنشاء جداول الصواب

أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \vee q$.

1 أنشئ عموداً لكل من $p, q, \sim p, \sim p \vee q$

2 ضع جميع حالات قيم صواب p, q

3 استعمل قيم صواب العبارة p لتحديد قيم صواب $\sim p$

4 استعمل قيم صواب q ، $\sim p$ لتحديد قيم صواب $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

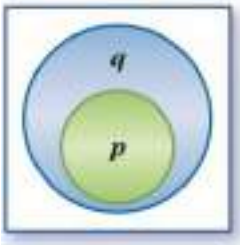
مثال : أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$

اولا ننشئ جدول للعبارات : $p, q, \sim p, \sim q, \sim p \wedge \sim q$

ونضع قيم q,p الثابته ... ونستعملها لتحديد النفي ، ثم نطبق عبارة الوصل (صحيحة اذا كانت جميع العبارات صحيحة)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$, \sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

مفهوم أساسي — **العبارة الشرطية**

التعبير اللفظي	الرموز	النموذج
تكتب العبارة الشرطية (إذا كان ... فإن...) على الصورة (إذا كان p، فإن q)	$p \to q$ وتُقرأ إذا كان p فإن q، أو p تؤدي إلى q	 $p \to q$
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (إذا) مباشرة الفرض.	p	
في العبارة الشرطية تُسمى الجملة التي تلي كلمة (فإن) مباشرة النتيجة.	q	

☼حدد الفرض والنتيجة في العبارات الشرطية التالية :

- اذا كان الطقس ماطر ، فسوف استعمل المظلة .
  الفرض : الطقس ماطر
  النتيجة : سوف استعمل المظلة
- يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان آحاده صفر .
  الفرض : آحاد العدد صفر
  النتيجة: يقبل العدد القسمة على 10

☼حدد الفرض والنتيجة في كل عبارة شرطية مما يأتي ثم أكتبها على صورة (إذا كان ،، فإن)

١) الثديات هي حيوانات من ذوات الدم الحار.
الفرض : الحيوان من الثديات
النتيجة : هو من ذوات الدم الحار
(إذا كان الحيوان من الثديات فإنه من ذوات الدم الحار)

٢) المنشور الذي قاعدتاه مضلعان منتظمان ، يكون منتظما" .
الفرض: قاعدتا المنشور مضلعان منتظمان
النتيجة : يكون المنشور منتظما
(إذا كانت قاعدتا المنشور مضلعين منتظمين فإنه يكون منتظما)

تذكر : أن الفرض والنتيجة والعبارة الشرطية نفسها جميعا عبارات منطقية قد تكون صحيحة أو خاطئة . قال عمر لزملائه :

إذا انتهيت واجبي ، فإني سوف ألعب معكم الكرة

الفرض	النتيجة	العبارة الشرطية	
أنهى عمر الواجب المنزلي	يلعب عمر الكرة مع زملائه	إذا أنهيت واجبي المنزلي ، فإنني سوف ألعب الكرة معكم.	
T	T	T	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي، ولعب الكرة مع زملائه، فإن العبارة الشرطية تكون صحيحة؛ لأنه أوفى بوعده.
T	F	F	إذا أنهى عمر واجبه المنزلي ولم يلعب الكرة مع زملائه، تكون العبارة الشرطية خاطئة؛ لأنه لم يفِ بوعده.
F	T	T	إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا ولكن النتيجة صحيحة. وبما أن العبارة الشرطية لا تقرر شيئًا في حالة عدم حل عمر واجبه، فإن الأمر راجع إلى عمر، إما أن يلعب الكرة مع زملائه أو لا، وتكون العبارة الشرطية صحيحة بغض النظر عما يفعله عمر.
F	F	T	إذا لم يُنهِ عمر واجبه، ولم يلعب الكرة مع زملائه، يكون الفرض خاطئًا، والنتيجة خاطئة. ولنفس السبب في الحالة السابقة تكون العبارة الشرطية صحيحة.

عندما يكون الفرض خاطئًا تكون العبارة الشرطية صحيحة بغض النظر عن النتيجة.

العبارات الشرطية		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

تكون العبارة الشرطية خاطئة فقط عندما يكون الفرض صحيحًا والنتيجة خاطئة.

لإثبات صحة العبارة الشرطية، يجب عليك إثبات أنه عندما يكون الفرض صحيحًا، فإن النتيجة صحيحة أيضًا. ولإثبات أن العبارة الشرطية خاطئة يكفي أن تعطي مثالًا مضادًا .

☼حدد قيم الصواب للعبارة الشرطية التالية ، اذا كانت صحيحة فسر تبريرك ، اذا خاطئة اعط مثال مضاد :

١) عند قسمة عدد صحيح على عدد صحيح آخر يكون الناتج صحيح ايضا" .
الفرض صحيح (يمكن قسمة عدد صحيح على عدد صحيح اخر)، نبحث صحة النتيجة مثال مضاد : عند قسمة 1 على 2 يكون الناتج 0.5 ، وبما أن الناتج غير صحيح فإن النتيجة خاطئة فالعبارة الشرطية خاطئة .

٢) إذا كان للمثلث 4 اضلاع ، فإنه مضلع مقعر .
لا يمكن ان يكون للمثلث اربعة اضلاع ، إذا" الفرض خاطئ ، فالعبارة الشرطية صحيحة (تكون خاطئة فقط اذا كان الفرض صحيح والنتيجة خاطئة)

٣) اذا كان الشهر القادم رمضان ، فإن هذا الشهر شعبان
رمضان الشهر الذي يلي شعبان إذاً الفرض صحيح ، والنتيجة صحيحة ، إذاً عبارة شرطية صحيحة

مفهوم أساسي — العبارات الشرطية المترابطة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي	الرموز	أمثلة
العبارة الشرطية هي العبارة التي يمكن كتابتها على صورة إذا كان p، فإن q.	$p \rightarrow q$	إذا كان $m\angle A = 35°$، فإن $\angle A$ حادة.
ينتج العكس من تبديل الفرض مع النتيجة في العبارة الشرطية.	$q \rightarrow p$	إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A = 35°$.
ينتج المعكوس من نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \rightarrow \sim q$	إذا كان $m\angle A \neq 35°$، فإن $\angle A$ ليست حادة.
ينتج المعاكس الإيجابي من نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \rightarrow \sim p$	إذا لم تكن $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A \neq 35°$.

إذا كانت العبارة الشرطية صحيحة، فليس بالضرورة أن يكون عكسها ومعكوسها صحيحين، بينما يكون المعاكس الإيجابي صحيحًا. ويكون المعاكس الإيجابي خاطئًا إذا كانت العبارة الشرطية خاطئة.

وبالمثل فإن عكس العبارة الشرطية ومعكوسها إما أن يكونا صحيحين معًا أو خاطئين معًا. وتسمى العبارات التي لها نفس قيم الصواب **عبارات متكافئة منطقيًا**.

مفهوم أساسي — العبارات المتكافئة منطقيًا

أضف إلى مطويتك

- العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي متكافئان منطقيًا.
- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقيًا.

مثال 4 من واقع الحياة — العبارات الشرطية المرتبطة

طبيعة: اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي للعبارة الشرطية الآتية، ثم استعمل معلومات الربط مع الحياة لتحديد ما إذا كان أي منها صحيحًا أم خاطئًا. وإذا كان خاطئًا، فأعط مثالًا مضادًا.

الأسود هي قطط تستطيع أن تزأر.

العبارة الشرطية: أعد كتابة العبارة على صورة (إذا كان... فإن...) .
إذا كان الحيوان أسدًا، فإنه قط يستطيع أن يزأر.
اعتمادًا على المعلومات إلى اليمين، تكون العبارة صحيحة.

العكس: إذا كان الحيوان قطًا يستطيع أن يزأر، فإنه يكون أسدًا.
مثال مضاد: النمر قط يستطيع أن يزأر، لكنه ليس أسدًا.
إذن فالعكس خاطئ.

المعكوس: إذا لم يكن الحيوان أسدًا، فإنه لا يكون قطًا يستطيع أن يزأر.
مثال مضاد: النمر ليس أسدًا، ولكنه قط يستطيع أن يزأر.
إذن المعكوس خاطئ.

المعاكس الإيجابي: إذا لم يكن الحيوان قطًا يستطيع أن يزأر، فإنه لا يكون أسدًا.
اعتمادًا على المعلومات في الهامش تكون العبارة صحيحة .

تحقق: تحقق أن للعبارات المتكافئة منطقيًا قيم الصواب نفسها.
العبارة الشرطية ومعاكسها الإيجابي كلاهما صحيح. ✔
العكس والمعكوس كلاهما خاطئ. ✔

❋سعد من افضل الطلاب في كرة القدم ، اذا انتخبه طلاب مدرسته فإنه سيمثل المدرسة ، فإذا مثل المدرسة فإنه سيكون قد انتُخب من قبل طلاب المدرسة ..

P : أُنتخب سعد من قبل الطلاب ، q : مثل سعد مدرسته

$p \to q$: اذ انتُخب سعد من الطلاب فإنه سيمثل المدرسة

$q \to p$: إذا مثل سعد مدرسته ، فإنه قد انتُخب من قبل الطلاب .

في هذه الحالة العبارة الشرطية $p \to q$ وعكسه ا$q \to p$ صحيحتان ، وتسمى العبارة المركبة الناتجة من وصل هاتين العبارتين باستعمال(و) عبارة شرطية ثنائية .

مفهوم أساسي — **العبارات الشرطية الثنائية**

التعبير اللفظي: العبارة الشرطية الثنائية هي عبارة وصل مكونة من العبارة الشرطية وعكسها.

الرموز: $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ، ويُرمز لها اختصاراً $(p \leftrightarrow q)$، وتقرأ p إذا وفقط إذا كان q.

تكتب العبارة الشرطية السابقة على النحو

$p \leftrightarrow q$: يُنتخب سعد من قبل الطلاب إذا وفقط إذا مثل المدرسة

اكتب العبارة التالية على صورة عبارة شرطية وعكسها ، ثم حدد ما اذا كانت العبارة الشرطية الثنائية صحيحة ام خاطئة ، واذا كانت خاطئة فأعط مثال مضاد .

- **تكون الزاوية قائمة اذا وفقط اذا كان قياسها 90**

العبارة الشرطية : إذا كان قياس الزاوية 90 فإنها قائمة

العكس : إذا كان قائمة فإن قياسها 90

كل من العبارة الشرطية وعكسها صحيحان اذاً عبارة شرطية ثنائية صحيحة

- **$x > -2$ إذا وفقط اذا كان x موجب**

العبارة الشرطية : إذا كان x عدد موجب فإن $x > -2$ ، عبارة صحيحة

العكس : اذا كان $x > -2$ فإن x عدد موجب ، نفرض x=-1 ، عندها ستكون العبارة الشرطية خاطئة (العكس خاطئ)

إذاً هذه عبارة شرطية ثنائية خاطئة

التبرير الاستنتاجي : يستعمل قواعد وحقائق وخصائص وتعريفات ،

مثال 1 من واقع الحياة **التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي**

حدد ما إذا كانت النتيجة قائمة على التبرير الاستنتاجي أم التبرير الاستقرائي في كل مما يأتي:

a) في كل مرة يلعب ماجد كرة القدم وهو يرتدي حذاءه المفضل، يسجل هدفًا واحدًا على الأقل. ولقد ارتدى حذاءه المفضل، وذهب ليلعب في مباراة هذه الليلة، وقد استنتج أنه سيسجل هدفًا واحدًا على الأقل في هذه المباراة .

اعتمد ماجد على نمط من المشاهدات للتوصل إلى النتيجة، فهو بذلك استعمل التبرير الاستقرائي.

b) إذا تأخر مشاري عن دفع قسط سيارته، فإنه سيقوم بدفع غرامة تأخير مقدارها 150 ريالًا. تأخر مشاري عن دفع قسط هذا الشهر، فاستنتج أن عليه دفع غرامة مقدارها 150 ريالًا.

اعتمد مشاري على حقائق ينص عليها عقد البيع في الحصول على النتيجة؛ لذا فقد استعمل التبرير الاستنتاجي.

عند استعمال القانون المضاد لإثبات خطأ التخمين الذي توصلنا اليه بالاستقرائي ، فإنه لا يعد طريقة صحيحة مضمونة، فلإثبات ذلك يجب استعمال الاستنتاجي وذلك بقانون الفصل المنطقي وقانون القياس المنطقي ،

مفهوم أساسي **قانون الفصل المنطقي**

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارة الشرطية $p \rightarrow q$ صحيحة، والفرض p صحيحًا، فإن النتيجة q تكون صحيحة أيضًا.

مثال: المعطيات : إذا لم يكن في السيارة وقود ، فإنها لن تعمل .
لا يوجد وقود في سيارة عبدالله.
نتيجة صحيحة: لن تعمل سيارة عبدالله .

مثال ☼ حدد ما اذا كانت النتيجة صحيحة في كل مما يأتي ام لا اعتماداً على المعطيات وفسر تبريرك .

المعطيات : ❋عندما يذهب مالك الى النادي فإنه يرتدي ملابس رياضية
❋ارتدى مالك ملابس رياضية

النتيجة : ذهب مالك الى النادي

الحل :

الخطوة ١ : p : ذهب مالك الى النادي ، q : ارتدى مالك ملابس رياضية

الخطوة ٢ : العبارة المعطاة (ارتدى مالك ملابس رياضية) تحقق النتيجة q للعبارة الشرطية الصحيحة ، لكن كون العبارة الشرطية صحيحة ونتيجتها صحيحة ايضاً ، لا يعني صحة الفرض ، فقد يرتدي مالك ملابس رياضية ولا يذهب الى النادي ، وبذلك تكون نتيجة خاطئة

مفهوم أساسي قانون القياس المنطقي

التعبير اللفظي: إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ صحيحتين، فإن العبارة الشرطية $p \rightarrow r$ صحيحة أيضًا.

مثال: المعطيات: إذا حصلت على عمل، فسوف تكسب نقودًا.
إذا كسبت نقودًا، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

نتيجة صحيحة: إذا حصلت على عمل، فسوف تتمكن من شراء سيارة.

أي العبارات الآتية تنتج منطقيًا من العبارتين الآتيتين؟

(1) إذا أمطرت اليوم فسوف تؤجل المباراة.

(2) إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تؤجل المباراة.

A إذا اعتذر أحد الفريقين فسوف تمطر اليوم.

B إذا أمطرت اليوم فسوف يعتذر أحد الفريقين.

C إذا لم تمطر فلن يعتذر أحد الفريقين.

D لا توجد نتيجة صحيحة.

اقرأ فقرة الاختبار

افترض أن p, q, r تمثل أجزاء العبارتين الشرطيتين المعلومتين.

p: أمطرت اليوم

q: تأجلت المباراة

r: اعتذر أحد الفريقين

حُل فقرة الاختبار

حلِّل منطقيًا العبارتين الشرطيتين باستعمال الرموز.

العبارة (1): $p \rightarrow q$ العبارة (2): $r \rightarrow q$

يمكن اعتبار كل من العبارتين الشرطيتين صحيحة. ومع ذلك لا يمكن استعمال قانون القياس المنطقي؛ لأن نتيجة العبارة الشرطية الأولى ليست فرضًا للعبارة الشرطية الثانية. وعلى الرغم من أنه يحتمل أن تكون العبارات A, B, C صحيحة إلا أن المنطق الذي استعمل فيها غير صحيح؛ لذلك تكون D هي الإجابة الصحيحة.

مثال 5 تطبيق قوانين التبرير الاستنتاجي

استعمل قانون الفصل المنطقي أو قانون القياس المنطقي لتحصل على نتيجة صحيحة إن أمكن من العبارات الآتية، واذكر القانون الذي استعملته. إذا تعذر الحصول على نتيجة صحيحة فاكتب "لا نتيجة صحيحة"، وفسِّر تبريرك.

المعطيات: • إذا كان عمرك 18 عامًا، يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

• عُمر سلمان 18 عامًا.

p: عمرك 18 عامًا.

q: يمكنك التقدم للحصول على رخصة قيادة السيارات.

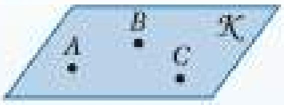
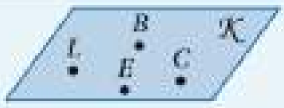
بما أن عمر سلمان 18 عامًا، فذلك يحقق الفرض p . وبتطبيق قانون الفصل المنطقي، تكون العبارة "يمكن أن يتقدم سلمان للحصول على رخصة القيادة" نتيجة صحيحة.

المسلمات والبراهين الحرة :

المسلمة(البديهية) : عبارة تقبل على انها صحيحة دون برهان

مسلمات — النقاط والمستقيمات والمستويات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.1 أي نقطتين يمر بهما مستقيم واحد فقط.		المستقيم n هو المستقيم الوحيد المار بالنقطتين P و R.
1.2 أي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد فقط.		المستوى $\mathcal{K}$ هو المستوى الوحيد الذي يحتوي النقاط A و B و C والتي لا تقع على استقامة واحدة.
1.3 كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل.		المستقيم n يحتوي النقاط P و Q و R.
1.4 كل مستوى يحوي ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.		يحتوي المستوى $\mathcal{K}$ النقاط L و B و C و E، وهي ليست على استقامة واحدة.
1.5 إذا وقعت نقطتان في مستوى، فإن المستقيم الوحيد المار بهما يقع كليًا في ذلك المستوى.		تقع النقطتان A و B في المستوى $\mathcal{K}$، ويمر بهما المستقيم m؛ إذن المستقيم m يقع كليًّا في المستوى $\mathcal{K}$.

مسلمتان — تقاطع المستقيمات والمستويات

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي		مثال
1.6 إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.		المستقيمان s و t يتقاطعان في النقطة P.
1.7 إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما يكون مستقيمًا.		يتقاطع المستويان $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ في المستقيم w.

مثال 1 من واقع الحياة — تحديد المسلّمات

هندسة معمارية : اشرح كيف توضح الصورة صحة كل من العبارات الآتية ، ثم اذكر المسلّمة التي استعملتها لبيان صحة كل عبارة.

a) يحتوي المستقيم m على النقطتين F و G. ويمكن أن تقع النقطة E أيضًا على المستقيم m.

حافة البناية عبارة عن المستقيم m. والنقاط E, F, G واقعة على هذه الحافة؛ لذا فهي تقع على المستقيم m. وبتطبيق المسلمة 1.3، التي تنص على أن كل مستقيم يحتوي نقطتين على الأقل، يتضح أن العبارة صحيحة.

عند اثبات تخمين فإننا نستعمل التبرير الاستنتاجي للانتقال من فرض الى النتيجة التي تريد اثبات صحتها بكتابة برهان ، وعند اثبات صحتها تسمى نظرية وتستخدم في البراهين لتبرير صحة عبارات اخرى .

البرهان الحر : **تكتب فقرة تفسر اسباب صحة التخمين في موقف معطى**

مفهوم أساسي — خطوات كتابة البرهان

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اكتب المعطيات، وارسم شكلاً يوضحها إن أمكن.

الخطوة 2: اكتب العبارة أو التخمين المطلوب إثباته.

الخطوة 3: استعمل التبرير الاستنتاجي لتكوين سلسلة منطقية من العبارات التي تربط المعطيات بالمطلوب.

الخطوة 4: برّر كل عبارة مستعملاً تعريفات أو خصائص جبرية أو مسلمات أو نظريات.

الخطوة 5: اكتب العبارة أو التخمين الذي قمت بإثباته.

المعطيات (الفرض) ← العبارات والمبررات ← المطلوب (النتيجة)

مثال 3 كتابة البرهان الحر

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$، اكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

الخطوتان 1 و 2

المعطيات: M نقطة منتصف $\overline{XY}$.

المطلوب: $\overline{XM} \cong \overline{MY}$

الخطوتان 3 و 4

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{XY}$، فإنه بحسب تعريف نقطة منتصف القطعة المستقيمة تكون $\overline{XM}$ و $\overline{MY}$ لهما الطول نفسه. ومن تعريف التطابق، إذا كانت القطعتان المستقيمتان لهما الطول نفسه، فإنهما تكونان متطابقتين.

الخطوة 5

لذا $\overline{XM} \cong \overline{MY}$.

في حال اثبات صحة برهان فإنها تسمى نظرية وتستعمل في براهين اخرى ،

ويعرف التخمين السابق بنظرية (نقطة المنتصف)

نظرية 1.1 نظرية نقطة المنتصف

أضف إلى مطويتك

إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$، فإن $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

الملزمة مجانية لا احلل الاستفاده منها مادياً @my__ideas

البرهان الجبري : هو برهان يتكون من سلسلة عبارات جبرية .

وفي هذا الجدول خصائص تبرر كثير من العبارات في البراهين"

مفهوم أساسي **خصائص الأعداد الحقيقية** أضف إلى مطويتك

الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a, b, c

خاصية الجمع للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
خاصية الطرح للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
خاصية الضرب للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $a \cdot c = b \cdot c$.
خاصية القسمة للمساواة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$، فإن $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
خاصية الانعكاس للمساواة	$a = a$
خاصية التماثل للمساواة	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
خاصية التعدي للمساواة	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
خاصية التعويض للمساواة	إذا كان $a = b$ ، يمكننا أن نضع b مكان a في أي معادلة أو عبارة جبرية تحتوي a
خاصية التوزيع	$a(b + c) = ab + ac$

☼ أثبت أنه اذا كان $-5(x + 4) = 70$ ، فإن $x = -18$ واكتب تبرير كل خطوة

$(-5) . x + (-5) . 4 = 70)$ **توزيع**

$-5x - 20 = 70$ **تبسيط**

$-5x - 20 + 20 = 70 + 20$ **جمع للمساواة**

$-5x = 90$ **تبسيط**

$\frac{-5x}{-5} = \frac{90}{-5}$ **قسمة للمساواة**

$X = -18$ **تبسيط**

ويمكن ان يكتب البرهان الجبري على شكل عمودين :

مثال 2 من واقع الحياة **كتابة البرهان الجبري**

علوم: إذا كانت الصيغة التي تحول درجات الحرارة من فهرنهايتية إلى سيليزية هي $C = \frac{5}{9}(F - 32)$، فإن الصيغة التي تحول درجات الحرارة من سيليزية إلى فهرنهايتية هي $F = \frac{9}{5}C + 32$. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات صحة هذا التخمين.

اكتب أولًا المعطيات والمطلوب إثباته.

المعطيات: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

المطلوب: $F = \frac{9}{5}C + 32$

البرهان:

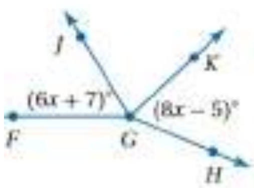
العبارات	المبررات
1) $C = \frac{5}{9}(F - 32)$	1) معطيات
2) $\frac{9}{5}C = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32)$	2) خاصية الضرب للمساواة
3) $\frac{9}{5}C = F - 32$	3) بالتبسيط
4) $\frac{9}{5}C + 32 = F - 32 + 32$	4) خاصية الجمع للمساواة
5) $\frac{9}{5}C + 32 = F$	5) بالتبسيط
6) $F = \frac{9}{5}C + 32$	6) خاصية التماثل للمساواة

البرهان الهندسي : بما ان في الهندسة متغيرات ايضاً واعداد وعمليات فإن معظم خصائص المساواة المستعملة في الجبر صحيحة ايضا في الهندسة ،لذلك نستخدم خصائص الجبر لأثبات صحة العلاقات بين القطع المستقيمة والزوايا .

الخاصية	القطع المستقيمة	الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$، فإن $CD = AB$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، فإن $m\angle 2 = m\angle 1$.
التعدي	إذا كانت $AB = CD$، و $CD = EF$، فإن $AB = EF$.	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$، و $m\angle 2 = m\angle 3$، فإن $m\angle 1 = m\angle 3$.

❋مثال : كتابة برهان هندسي

اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كانت $\angle FGJ \cong \angle JGK$، $\angle JGK \cong \angle KGH$، فإن $x = 6$.



المعطيات: $\angle FGJ \cong \angle JGK$، $\angle JGK \cong \angle KGH$، $m\angle FGJ = (6x + 7)°$، $m\angle KGH = (8x - 5)°$

المطلوب: $x = 6$

العبارات	المبررات
1) $\angle FGJ \cong \angle JGK;\ \angle JGK \cong \angle KGH$	1) معطيات
2) $m\angle FGJ = m\angle JGK;\ m\angle JGK = m\angle KGH$	2) تعريف تطابق الزوايا
3) $m\angle FGJ = m\angle KGH$	3) خاصية التعدي للمساواة
4) $6x + 7 = 8x - 5$	4) خاصية التعويض للمساواة
5) $6x + 7 + 5 = 8x - 5 + 5$	5) خاصية الجمع للمساواة
6) $6x + 12 = 8x$	6) بالتبسيط
7) $6x + 12 - 6x = 8x - 6x$	7) خاصية الطرح للمساواة
8) $12 = 2x$	8) بالتبسيط
9) $\frac{12}{2} = \frac{2x}{2}$	9) خاصية القسمة للمساواة
10) $6 = x$	10) بالتبسيط
11) $x = 6$	11) خاصية التماثل للمساواة

اسئلة المعيار الخامس والسادس والسابع :

١- المتوسط الحسابي لستة أعداد هو 20 ، وكان متوسط مجموع عددين منهما هو 50 فما المتوسط الحسابي للأربعة الأعداد الباقية .

20	5	7	10

٢- كيس فيه عدد من الكرات (بيضاء-حمراء-سوداء) ثلاثة ارباع الكرات بيضاء، وخمسا الباقي حمراء، فما نسبة الكرات السوداء .

15%	20 %	10%	25%

٣- هناك جريدة تصدر 1820جريدة اسبوعيا اذا علمت ان متوسط ما يبيع العامل في اليوم الواحد 20 جريدة ، فأوجد عدد العمال .

15	13	12	11

٤- سله فيها 10 كرات صفراء و 25 كرة زرقاء و اردنا إضافة كرات صفراء بحيث انها تكون $\frac{2}{3}$ عدد الكرات الموجودة في السلة ، فكم عدد الكرات الصفراء التي سوف نضيفها .

30	40	10	15

٥- 15 عدد متتالي متوسطهم 15 فما متوسط اول خمسة اعداد .

15	10	25	5

٦- ثلاثة اعداد فردية متتالية مجموعها 399 ، فما المتوسط الحسابي للعدد الاول والثاني .

130	131	132	133

٧- مجموع 6 اعداد فردية متتالية 396 ، اوجد متوسط اول رقمين .

61	62	63	64

٨- خمسة اعداد متتالية متوسطهم 8 فأوجد اكبر عدد فيهم .

6	8	10	12

٩- المتوسط الحسابي لأربع اعداد هو(20) فإذا كان المتوسط الحسابي عند استبعاد احدى هذه الأعداد يساوي (15) فإن العدد الذي تم استبعاده هو

35	33	30	29

١٠- اذا كان احتمال ان ترمي هند الكرة و تصيب الهدف $\frac{1}{3}$ واحتمال ان يرمي احمد الكرة ويصيب الهدف $\frac{1}{4}$ فما احتمال ان يصيبوا الهدف كليهما معا"

1/12	7/12	5/12	9/12

١١- متوسط درجات سلطان في اول 5 اختبارات هو *92* إذا اراد تحسين متوسط درجاته ليصبح *93* فما الدرجة التي يجب ان يحصل عليها في الاختبار التالي لتحقيق ذلك

95	*98*	*97*	*100*

١٢- رميت قطعة عملة 8 *مرات* فما احتمال ظهور الصورة مرتين

7/32	*7/64*	*1/8*	*5/16*

١٣- لدينا 10 *قراءات* احصائية مجموع مربعاتها *520* فإذا كان متوسط هذه القراءات هو *4* فإن الانحراف المعياري لها

5	*6*	*16*	*20*

١٤- لعب نادي 12 مباراة ودية ، فاز في 6 وخسر في 4 و تعادل في 2 ، بقي امامه مباراة واحدة . ما احتمال ان يتعادل فيها استنادا إلى نتائجه السابقة .

1/12	1/10	1/5	1/6

١٥- بكم طريقة يمكن كتابة اسم خالد ...

4	8	24	36

١٦- تضم قائمة مطعم 3 انواع من الشوربة و 5 انواع سلطة 6 انواع لحم ، بكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكونه من 3 اصناف ؟

30	60	90	120

١٧- إذا كان هناك 7 أشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا سوى 3 كراسي ، فبكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الثلاثة معا" .

200	205	210	215

١٨- بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 اشخاص في صف به 9 كراسي

15200	15000	15100	15120

١٩- اجتمع 6 اشخاص ، اذا صافح كل شخص الاخر مرة واحدة فقط ، فكم عدد المصافحات التي تمت .

15	20	30	45

٢٠- مسجد له 7 ابواب ، بكم طريقة يستطيع شخص دخول مسجد من باب والخروج من الاخر

40	42	44	46

٢١- تحمل الواح السيارات في السعودية 3 حروف و 3 ارقام ، فكم عدد اللوحات التي تحمل 3 حروف متطابقة و 3 ارقام ليست جميعها متطابقة

25200	27720	28200	28000

٢٢- ارادت 4 نوادي اقامة مباريات لكرة القدم بينها بحيث تلعب هذه النوادي مثنى مثنى ، فبكم طريقة يمكن اتمام ذلك .

12	6	10	5

٢٣- اذا نجح محمد في اختباراته فسيسافر مع زملائه اذا سافر محمد مع زملائه فسيذهب ابها .حدد أي العبارات تنتج منطقيا من العبارتين السابقتين :

اذا سافر محمد فإنه نجح في اختباراته	اذا ذهب محمد الى ابها فسيذهب مع زملائه	اذا نجح محمد في اختباراته فسيذهب الى ابها	اذا ذهب محمد الى ابها فإنه نجح في اختباراته

٢٤- $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ *تكون صحيحة اذا كانت :*

P صائب ، q صائب	*P صائب ، q خاطئ*	*P خاطئ ، q صائب*	*P خاطئ ، q خاطئ*

٢٥- بكم طريقة يمكن ترتيب 6 كراسي في صف واحد اذا علم ان ثلاث كراسي حمراء . وكرسيين اصفر ،وكرسي واحد ابيض .

60	*90*	*220*	*300*

٢٦- اذا كان $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + x$ فإن قيمة x

1	N	n^2	n^3

٢٧- صندوق به *10* كرات مختلفة ، اذا سحبت *3* كرات على التوالي مع الارجاع بكم طريقة يمكن السحب

500	330	1000	720

٢٨- اذا كانت $5 < x < 19$ فما قيمة x اذا كان الفرق بين الوسيط و المتوسط قياسه *1* ، للقيم : *3,5,7,11,x,19*

25	20	15	10

٢٩- إذا كان المتوسط الحسابي 9 للقيم : 2,6,7,12,17,x فأوجد قيمة x ؟

12	9	11	10

٣٠- الوسيط للقيم التالية : *36 , 39 , 41 , 48*

42	39	40	41

٣١- اطلق صياد ببندقيته على الشكل التالي ما احتمال ان يصيب الدائرة؟

$1-\frac{2}{\pi}$	$1-\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$

٣٢- صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و 5 كرات صفراء وكرة بيضاء ، ما احتمال ان تكون احداهما صفراء و الاخرى حمراء ؟

		$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{4}$

٣٣- اذا اختير طالب من معمل العلوم فما احتمال ان يكون من الصف الأول؟

	معمل رياضيات	معمل علوم
الصف الاول	12	10
الصف الثاني	3	7

$\frac{7}{17}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{22}$	$\frac{10}{17}$

٣٤- اذا كان التقريران A ,B صائبان فماذا نضع في الفراغ لتحقق العلاقة؟

$$A \to (\sim B \wedge A) \to \sim A \quad \to \quad (A \leftrightarrow \sim B \vee \boxtimes) = T$$

لا يوجد	T , F	F	T

٣٥- شجرة بها n من الرؤوس فكم عدد اضلاعها ؟

2n	n^2	n-1	N

الحلـول :

١- *المتوسط هو مجموع البيانات مقسوما على عددها :*

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=20$$

$a+b+c+d+e+f = 120$ 1

$$\frac{a+b}{2}=50 \gg \quad a+b=100 \ldots\ldots..2$$

المتوسط الحسابي للأربعة المتبقية مجهول x :

$$\frac{c+d+e+f}{4}=x \gg \quad c+d+e+f=4x \ldots\ldots 3$$

نعوض ب 3,2 في المعادلة 1

100+4x = 120 >>> x = 5

٢- *البيضاء* $\frac{3}{4}$ *، إذا" يتبقى* $\frac{1}{4}$ *الكمية ،،، الحمراء* $\frac{2}{4}$ *من المتبقي* $\frac{1}{4}$

$$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

ننقص الحمراء من الربع المتبقي

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}=0,15 = 15\%$$

٣- *1820 اسبوعيا ،، نقسمها على 7 لنعرف كم تصدر في اليوم*

$\frac{1820}{7}=260$ *وكل عامل ينتج 20 في اليوم*

$$\frac{260}{20}=13$$

٤- *عدد جميع الكرات 35 ، نفرض x عدد الكرات الصفراء الجديدة*

$$\frac{10+x}{35+x}=\frac{2}{3}$$

X = 40

٥- $\frac{x+(x+1)+(x+2)+\cdots\ldots\ldots+(x+14)}{15}=15$

$$15x+(1+2+3+\cdots+14)=225$$

قانون ايجاد مجموع اعداد متتالية: (العدد الاول+الاخير)×عدد الاعداد ÷ 2

$$\frac{14(1+14)}{2}=\frac{14(15)}{2}=105$$

$$15x+105=225$$

X = 8 العدد الاول ، متوسط الخمسة اعداد الاولى : $\frac{8+9+10+11+12}{5}=10$

٦- الفردية يعني بينهم رقمين :

X+(x+2)+(x+4) = 399

3x+6 = 399

العدد الاول X = 131

العدد الثاني 133

متوسطهم : $\frac{133+131}{2} = 132$

٧- X + (x+2) +(x+4) + (x+6) + (x+8) + (x+10) = 396

نوجد قيمة x وهو الرقم الاول :

6x + (2+4+6+8+10) =396

6x +30 = 396

X =61

$$\frac{61+63}{2} = 62$$

٨- $\frac{x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)}{5} = 8$

$5x + 10 = 40 \gg x = 6$

اصغر عدد هو 6 و اكبر عدد :

(x+4)=(6+4) = 10

٩- $\frac{a+b+c+d}{4} = 20$

$a + b + c + d = 80$ →1

$$\frac{a+b+c}{3} = 15$$

$a + b + c = 45$ → 2 ، *بالتعويض 2 في 1*

45+d=80 >>> d= 35

١٠- $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

١١- $\frac{a+b+c+d+e}{5} = 92$ *(معادلة متوسط الدرجات)*

$a + b + c + d + e = 460$ ، *مجموع درجات الاختبارات الخمسة*

$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = 93$ ، *(معادلة متوسط درجات الاختبارات الستة)*

$\frac{460 + f}{6} = 93 \gg 460 + f = 558 \gg f = 98$

١٢- نوجد فضاء العينة و هو جميع الحلول

$$2^8 = 256$$

عدد الحوادث رميتين من 8 رميات وهي توافيق :

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8.7.6!}{2!\,.\,6!} = 28$$

الاحتمال : $\frac{\text{الحوادث}}{\text{فضاء العينة}}$

$$\frac{28}{256} = \frac{7}{64}$$

١٣- قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - x^2}$

$$= \sqrt{\frac{520}{10} - 4^2} = 6$$

١٤- 12 مباراة وتعادل في 2

التعادل : $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ وهذه نسبة التعادل في مبارياته

اذا الاحتمال $\frac{1}{6}$

١٥- اسم خالد من 4 احرف اذاً" نضرب 1×2×3×4 =24

١٦- مبدأ العد الأساسي : 6×5×3= 90

١٧- هنا الترتيب مهم لانهم يجب ان يستطيع الجميع الجلوس

لذلك نستخدم التباديل : $\frac{n!}{(n-r)!}$

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

١٨- تباديل :

$$\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 15120$$

١٩- بما انهم 6 اشخاص ، فإن الشخص الاول سيصافح الخمسة الاخرين 5 مصافحات ، والثاني 4 مصافحات للمتبقين ، والثالث 3

وهكذا : 5+4+3+2+1 = 15

او الحل بقانون المصافحات (اذا كانت الاعداد كبيرة) :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = \frac{6(5)}{2} = 15$$

٢٠- *عندما يدخل من الباب الأول يستطيع ان يخرج من 6 ابواب*

وهكذا : *7* ابواب يستطيع الدخول منها و *6* الخروج منها ، (مبدأ العد)

الحل : 7× 6 = 42

٢١- *لوحة السيارة تتكون من { 3 حروف ، 3 أرقام }*

مثل { أ أ أ ، 123 }

أولا" عدد حروف اللغة العربية = **28** ،

٢	١	٠	ا	ا	ا
٣	١	٠	ب	ب	ب
٤	١	٠	ج	ج	ج
....			....		
٩	٩	٩	ي	ي	ي

إذا" في خانة الأحرف هناك **28** احتمال فقط لانها يجب ان تكون مكررة ،

عدد الأعداد الممكنة لكل 3 أحرف متشابهة = 10×10×10 =1000

{ لأن كل خانة في اللوحة تحمل 10 احتمالات من الصفر إلى التسعة }

{ ألف رقم لكل حرف مكرر } لكن السؤال طلب أرقام غير مكررة وتكرر الأرقام 10 مرات

مثل { 000 ، 111، 222، *الى* 999 }

1000 - 10 = 990

28 × 990 *حرف =* 27720 *لوحة ممكنه*

٢٢- *يشبه سؤال المصافحات :*

النادي الرابع يلعب مع الثلاثة الأخرى 3 مباريات

، والنادي الثالث يلعب مع الاثنين 2 مباريات

والنادي الثاني يلعب مع الاخير 1 مباراة

3+2+1 = 6

طريقة اخرى بقانون المصافحات $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(3)}{2} = 6$

٢٣- اذا نجح محمد في اختباراته فسيذهب الى ابها (قانون قياس منطقي)

-٢٤

P	Q	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

من الجدول $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ اذا كان P صائب ، q صائب

-٢٥ عدد الطرق : مضروب عدد الكراسي قسمة مضروب عدد التكرارات

$$\frac{6i}{3i.2i.1i} = \frac{6.5.4.3i}{3i.2.1} = \frac{6.5.4}{2} = 60$$

-٢٦ هذا رمز التوافيق :

$$\binom{2n}{2} = \frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-2)!} = n(2n-1)$$
$$= 2n^2 - n$$

$$2\binom{n}{2} = 2.\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$$

اذا" $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + x \quad \rightarrow \quad 2n^2 - n = n^2 - n + x \quad \rightarrow \quad x = n^2$

-٢٧ عدد طرق سحب x من العناصر على التوالي مع الارجاع من مجموعه بها y من العناصر = $y^x = 10^3 = 1000$

-٢٨ المتوسط : $\frac{3+5+7+11+x+19}{6} = \frac{45+x}{6}$

نجرب من الخيارات في السؤال التي تكون اكبر من 6 و اصغر من 19

عندما : $x = 10$ يكون الوسيط $\frac{7+10}{2} = 7,5$ و المتوسط : $\frac{45+10}{6} = 9.2$

الفرق بينهم 1,7 فرض خاطئ

عندما $x = 15$ ، الوسيط $\frac{7+11}{2} = 9$ والمتوسط : $\frac{45+15}{6} = 10$

الفرق بينهم 1 وهذا هو الحل .

-٢٩

$$\frac{2+6+7+12+17+x}{6}=9$$

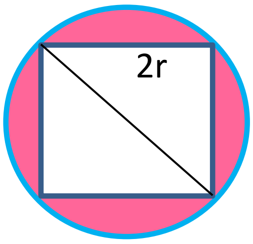
$$\rightarrow \quad 2+6+7+12+17+x = \ 9.6$$

$$44+x=54 \quad \rightarrow \quad x=54-44 \quad \rightarrow \quad x=10$$

-٣٠ نرتب البيانات من الادنى للأعلى والوسيط هو القيمة في المنتصف ، وبما ان البيانات عددها زوجي . نجمع القيمتين في المنتصف ونقسمها على **2**

$$\frac{39+41}{2}=40$$

-٣١ نفرض ان قطر الدائرة = **2r** إذاً" مساحة الدائرة : $r^2\pi$ ،



نفرض ان ضلع المربع هو **x** نوجد مساحة المربع بمعلومية قطره(قانون) :

$$\frac{(2r)^2}{2}=\frac{4r^2}{2}=2r^2$$

مساحة المربع $2r^2$

المطلوب هو احتمال اصابة الدائرة باستثناء المربع (المنطقة المظللة بالوردي)

ننقص المساحتين لإيجادها

مساحة الدائرة – مساحة المربع = $r^2\pi-2r^2=r^2(\pi-2)$

الاحتمال = $\frac{\text{المطلوب}}{\text{الكل}}$ = $\frac{\text{الفرق بين المساحتين}}{\text{مساحة الدائرة}}$

$$\frac{r^2(\pi-2)}{r^2\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}$$

-٣٢ سحب بدون ارجاع غير مستقل

- احتمال ان الاولى صفراء والثانية حمراء :

$$\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$$

- احتمال الاولى حمراء والثانية صفراء :

$$\frac{4}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{2}{9}$$

الان نجمع الاحتمالين : $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

٣٣- اخترنا طالب من معمل العلوم فقط (فضاء العينة) 17 ، طلاب الصف الاول في المعمل (الاحتمال) 10 , الحل : $\frac{10}{17}$

٣٤- التقريران صائبان إذا" A=T , B=T ننشئ جدول لترتيب العلاقات:

A	$\sim A$	B	$\sim B$	$\sim B \wedge A$	$A \to (\sim B \wedge A)$	$A \to (\sim B \wedge A) \to \sim A$
T	F	T	F	F	F	T

بما ان الحد الأيسر قبل العلاقة $\to$ صائب ، يجب ان يكون الحد الاخر صائب ايضا" لكي يتحقق بها شرط الصواب .

$$T \quad \to \quad (A \to \sim B \vee \boxtimes) = T$$

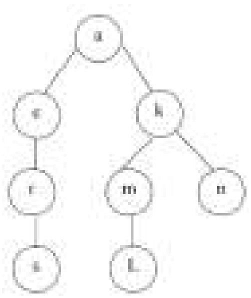
$(A \to \sim B \vee \boxtimes)$	$\sim B \vee \boxtimes$
T	لكي يكون التقرير صائب نضع في الفراغ T

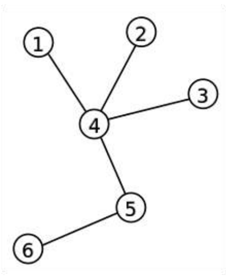
للتحقق :

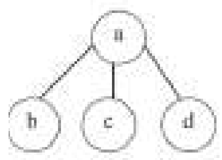
$$A \to (\sim B \wedge A) \to \sim A \quad \to \quad (A \leftrightarrow \sim B \vee T) =$$
$$T \to (F \wedge T) \to F \to T \leftrightarrow F \vee T =$$
$$T \to F \to F \to T \leftrightarrow T =$$
$$F \to F \to T =$$
$$T \to T =$$
$$T$$

٣٥- (n – 1)

شجرة(نظرية المخططات) : رسم بياني لمجموعة من الرؤوس المرتبطة مع بعضها ، حيث كل رأسين مرتبطين بمسار واحد ، بالتالي لا يوجد أي مسار دائري
امثلة على الاشجار البيانية : (نلاحظ ان الرؤوس تزيد دائماً بواحد عن الاضلاع)







المعيار : الثامن

خاص بالمستوى 2

المعيار	المؤشرات
المعيار ٣، ٤، ٨: يتعرف حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاتهما	١. يحسب مجموع المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية ٢. يحكم على تقارب المتتابعات والمتسلسلات غير المنتهية ٣. يتعرف النهايات ويستخدمها في تعريف مشتقة الدالة والحكم على اتصالها ٤. يحسب مشتقة الدالة ويرسم منحناها ٥. يحسب تكامل دالة ويستخدمها في حساب المساحات والحجوم ٦. يحل مسائل تطبيقية على التفاضل والتكامل

المعيار الثامن جميعه خاص بالمستوى الثاني فقط .

متتابعات ومتسلسلات :

المتتابعة الحسابية : مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد ويسمى كل عدد في المتتابعة حدا" ، يرمز للحد الأول a_1 وللحد الثاني a_2 وهكذا .

مفهوم أساسي — **المتتابعات كدوال**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية.

الرموز:	عناصر المجال:	1 2 3 ... n	ترتيب الحد
	عناصر المدى:	a_1 a_2 a_3 ⋯ a_n	حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كل حد في **المتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد الذي يسبقه مباشرة. وتُسمّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتابعة: 3, 6, 9, 12, 15 هي متابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كل حدٍّ على الحد الذي يسبقه بمقدار 3 .

3 6 9 12 15

+3 +3 +3 +3

◄مثال بين إذا كانت كل متتابعة فيما يلي حسابية أم لا :

١) 5,-6,-17,-28,.......

الفرق بين كل حد وحد ثابت وهو -11 اذا" متتابعة حسابية

٢) -4,12,28,42,.....

الفرق غير ثابت 16,16,14 اذا" غير حسابية

المتتابعة الهندسية: **المتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيِّ حد من حدودها بضرب الحد السابق له مباشرة في عدد ثابت يسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$. متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أي أن كل حد في المتابعة هو 4 أمثال الحد السابق له مباشرة.

$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{4}$ 1 4 16

×4 ×4 ×4 ×4

◄مثال بين إذا كانت كل متتابعة فيما يلي هندسية أم لا :

١) -2,6,-18,54,.....

$$\frac{6}{-2}=-3\,,\frac{-18}{6}=-3\;,\frac{54}{-18}=-3$$

بما ان النسب متساوية ،فإن المتتابعة هندسية

مفهوم أساسي — الحد النوني في المتتابعة الحسابية

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحد النوني في متتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

◄مثال أوجد الحد الثاني عشر في المتتابع الحسابية : $9, 16, 23, 30, \dots \dots$

١) نوجد الاساس : $16 - 9 = 7\ ,\ 23 - 16 = 7\ , 30 - 23 = 7$

اذاً الاساس $d = 7$

٢) نوجد الحد الثاني عشر :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{12} = 9 + (12-1)7$$
$$= 9 + 77 = \ \ 86$$

◄مثال اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة $5, -13. -31, \dots ..$

-18 =-13-5 ، إذا d=-18 والحد الاول 5

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 5 + (n-1)(-18)$$
$$a_n = 5 - 18n + 18$$
$$a_n = -18 + 23$$

الاوساط الحسابية: هي الحدود الواقعة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: .... , 22 , ؟ , ؟ , ؟ , ؟ , 8-

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحد الأول والحد الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني في المتتابعة الحسابية
$22 = -8 + (6-1)d$	$a_1 = -8\ ,\ a_6 = 22\ ,\ n = 6$
$30 = 5d$	بإضافة 8 إلى الطرفين والتبسيط
$6 = d$	بقسمة الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

مفهوم أساسي **المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية** أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1, a_n	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
بالصيغة البديلة	a_1, d	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

◄ *مثال اوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية* 12+19+26+.....+180

نوجد الاساس 19 -12 = 7 = d ، $a_1 = 12 \ , \ a_n = 180$

يجب ايجاد قيمة n اولا كي نجد المجموع .

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$180 = 12 + (n-1)7$$
$$180 = 12 + 7n - 7$$
$$7n = 175$$
$$n = 25$$

الان نستعمل احدى الصيغتين لحساب S_n

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)7]$$
$$S_{25} = 12.5(192) = 2400$$

مثال 5 **إيجاد الحدود الثلاثة الأولى**

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, \ S_n = 430$

الخطوة 1: أوجد قيمة n

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	صيغة المجموع
$430 = n\left(\frac{7 + 79}{2}\right)$	$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$
$430 = n(43)$	بالتبسيط
$10 = n$	بقسمة طرفي المعادلة على 43

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحد النوني للمتتابعة الحسابية
$79 = 7 + (10-1)d$	$a_n = 79, a_1 = 7, n = 10$
$72 = 9d$	بطرح 7 من طرفي المعادلة
$8 = d$	بقسمة طرفي المعادلة على 9

الخطوة 3: استعمل d لحساب كلٍّ من a_2 ، a_3

$a_2 = 7 + 8 = 15$ $\quad$ $a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن الحدود الثلاثة الأولى هي 23 ، 15 ، 7

مفهوم أساسي: رمز المجموع

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

صيغة حدود المتسلسلة: $f(k)$ ؛ آخر قيمة لـ k: n ؛ أول قيمة لـ k: $k = 1$

مثال:

$$\sum_{k=1}^{12} (4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

أوجد $\sum_{k=4}^{18} (6k-1)$

A 846 $\quad$ **B** 910 $\quad$ **C** 975 $\quad$ **D** 1008

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كل حد يزيد على الحد السابق له بمقدار 6،
ويوجد فيها 15 حدًا $(n = 15)$؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$a_1 = 6(4) - 1 = 23$ $\quad$ $a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

$S_n = n\left(\frac{a_1 + an}{2}\right)$	صيغة المجموع
$S_{15} = 15\left(\frac{23 + 107}{2}\right)$	$n = 15, a_1 = 23, a_n = 107$
$S_{15} = 15(65) = 975$	

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو **C** .

المتتابعات الهندسية :

مفهوم أساسي **الحد النوني في المتتابعة الهندسية**

يُعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r بالصيغة الآتية:

$a_n = a_1 r^{n-1}$ حيث n عدد طبيعي

◄اكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية $r = 6$, $a_4 = 5$

١) نوجد الحد الاول

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$5 = a_1(6^{4-1})$$
$$\frac{5}{216} = a_1$$

٢) نعوض في الصيغة $a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$

مثال 3 **إيجاد الأوساط الهندسية**

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحد الأول والحد الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $5 = 2 + 3$، ولذلك يكون $n = 5$

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$1250 = 2r^{5-1}$	$a_n = 1250,\ a_1 = 2,\ n = 5$
$\pm 5 = r$	بقسمة الطرفين على 2، ثم إيجاد الجذر الرابع

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

أو

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي : $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

مفهوم أساسي المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

◀ **مثال أوجد** $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

المتسلسلة المعطاة هندسية لان النسبة بين كل حدين ثابته 2 ، اذا" $r=2$

الان نوجد a_1, n،و لإيجاد الحد الأول نعوض ب 3 مكان k ويستخرج كالتالي:

$a_1 = 4.2^{3-1} = 16$ والاساس $r=2$ وعدد الحدود هو 8 = 10-3+1

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

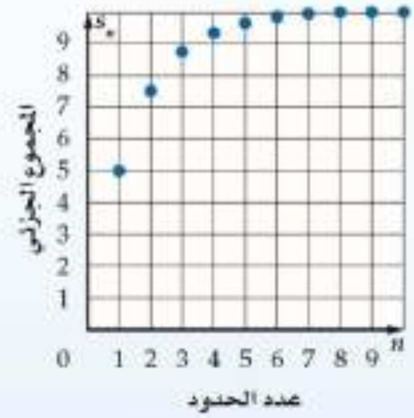
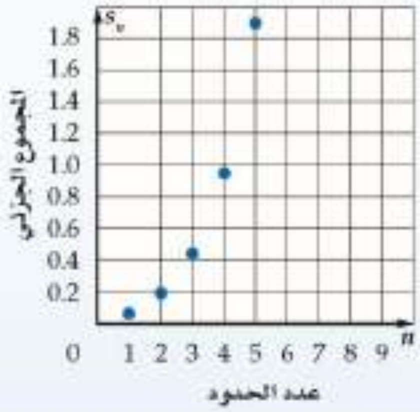
$$S_8 = \frac{16 - 16(2)^8}{1-2} = 4080$$

مثال 6 إيجاد الحد الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$	صيغة المجموع
$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1-3}$	$S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$
$13116 = \frac{a_1(1-3^7)}{1-3}$	باستعمال خاصية التوزيع
$13116 = \frac{-2186 a_1}{-2}$	بالطرح
$13116 = 1093 a_1$	بالتبسيط
$12 = a_1$	بقسمة الطرفين على 1093

مفهوم أساسي المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة — مطويتك

المتسلسلات المتقاربة	المتسلسلات المتباعدة
التعبير اللفظي، يقترب المجموع من عدد حقيقي.	**التعبير اللفظي،** لا يقترب المجموع من عدد حقيقي.
إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس): $\lvert r\rvert < 1$	إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس): $\lvert r\rvert \ge 1$
مثال: $5 + 2.5 + 1.25 + \ldots$	مثال: $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$
	

◀ حدد أي المتسلسلتين الهندسيتين متقاربة و أيهما متباعدة .

- $54 + 36 + 24 + \ldots\ldots$

نوجد قيمة r ، $r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ وبما ان $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإنها متقاربة

- $8+12+18+\ldots\ldots\ldots$

$r = \frac{12}{8} = 1.5$ وبما أن $1.5 > 1$ فإنها متباعدة

مفهوم أساسي مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُرمز له بالرمز S حيث $\lvert r\rvert < 1$

ويعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ملاحظة : **المتسلسلة المتباعدة ليس لهما مجموع**

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3}+\frac{6}{15}+\frac{18}{75}+\dots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r=\frac{6}{15}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$ بقسمة الحد على الحد السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5}<1$ ، فإن للمتسلسلة مجموع.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S=\frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$ $a_1=\frac{2}{3}, r=\frac{3}{5}$

$=\frac{2}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{5}{3}$ بالتبسيط

b) $6+9+13.5+20.25+\dots$

$r=\frac{9}{6}=1.5$؛ وبما أن $1.5>1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{\infty}18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

$S=\frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$=\frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $a_1=18, r=\frac{4}{5}$ ، ثم بالتبسيط

$=\frac{18}{\frac{1}{5}}=90$ بالتبسيط

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545... = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \dots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب $0.\overline{63}$ على صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \dots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \dots$$

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$ صيغة المجموع

$$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$$ $a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$

$$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$ بالتبسيط

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$x = 0.\overline{63}$ افرض $x = 0.\overline{63}$

$x = 0.636363...$ بالكتابة على صورة كسر عشري دوري

$100x = 63.636363...$ بضرب كلا الطرفين في 100

$99x = 63$ بطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$

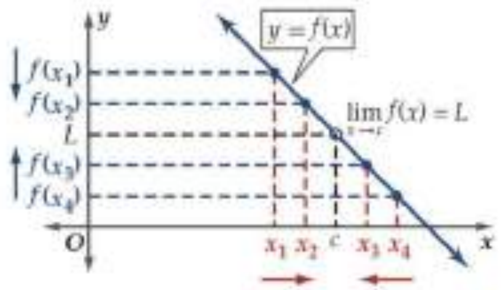
$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ بقسمة الطرفين على 99

النهـايـات :

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

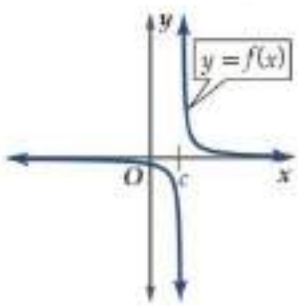
الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

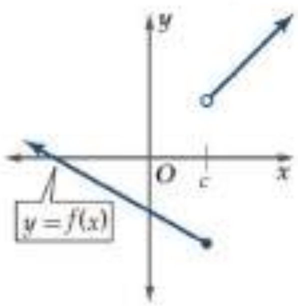
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



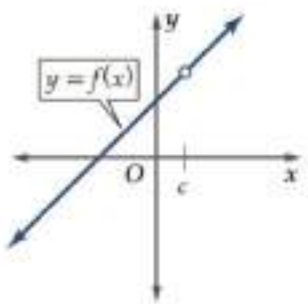
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل لإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

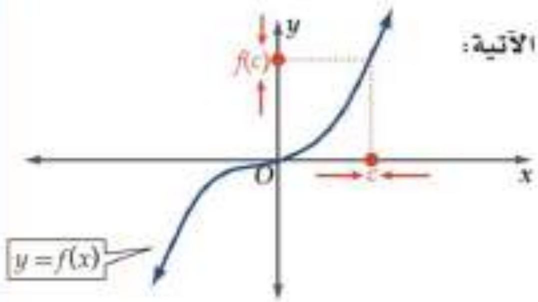
مثال:



ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.



الملزمة مجانية لا احلل الاستفاده منها مادياً @my__ideas

التحقق من الاتصال عند نقطة :

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ عند x=2

برر اجابتك باستعمال اختبار الاتصال .

١) هل *f(2)* موجودة ؟

F(2)=1 أي ان الدالة معرفة عند *x=2*

٢) هل $lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة ؟

نكون جدول يبين قيم *f(x)* عندما تقترب *x* من *2* من اليسار و اليمين . نفرض ارقام قريبة من *2* ثم نعوضها في المعادلة

x	1.9	1.99	2	2.01	2.1
F(x)	0.52	0.95		1.05	1.52

يبين الجدول أنه عندما تقترب قيم *x* من *2* من اليسار ومن اليمين ، فإن قيمة f(x) *تقترب من* 1 ، أي ان $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$

٣) هل $lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

بما أن $lim_{x\to 2} f(x) = 1$ *f(2)=1* نستنتج ان

$lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ اذن الدالة متصلة عند *x=2*

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين متصلة عند قيم *x* المعطاة ، واذا كانت غير متصلة حدد نوع عدم الاتصال : لانهائي ،قفزي ،قابل للإزالة

$f(x)\begin{cases} 3x-2, & x > -3 \\ 2-x & , x \le -3 \end{cases}$ عند x = -3

١) *f(-3)* موجودة لأن *f(-3)=5*

٢) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب *x* من *-3*

X	*-3.1*	*-3.01*	*-3*	*-2.99*	*-2.9*
F(x)	*5.1*	*5.01*		*-10.97*	*-10.7*

يظهر الجدول قيم *f(x)* تقترب من *5* عندما تقترب *x* من *-3* من اليسار ،
وفي حين تقترب *f(x)* من *-11* فإن *x* تقترب من *-3* من اليمين ،
وبما أن قيم *f(x)* تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب *x* من *-3* فإن للدالة **عدم اتصال قفزي** عند *x= -3*

♣ أعد تعريف الدالة لتصبح متصلة عند x=4

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

١) $F(4) = \frac{0}{0}$ ، أي ان *f(4)* غير موجودة

٢) ابحث قيم الدالة عندما تقترب *x* من *4*

X	3.9	3.99	4	4.01	4.1
F(x)	7.9	7.99		8.01	8.1

نلاحظ أن قيم *f(x)* تقترب من *8* عندما تقترب *x* من *4* من الجهتين ، أي أن $\lim_{x\to 4} 8 = 8$

٣) *f(x)* غير متصلة عند *x=4* لان *f(4)* غير موجودة، وبما أن $lim_{x\to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند *x=4*

٤) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند *x=4* ، لذا نعيد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x)\begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & , \ x \neq 4 \\ 8 & , \ x = 4 \end{cases}$$

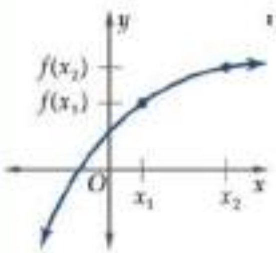
نلاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند *x = 4* لأن *f(4)* موجودة وتساوي *8* .

مفهوم أساسي **الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة**

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

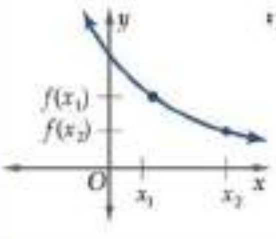
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

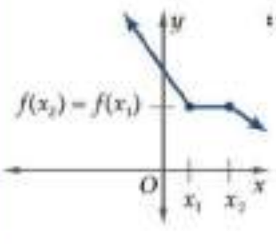
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

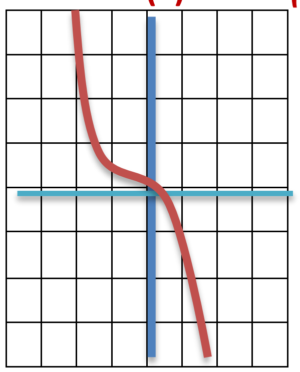
الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



هل الدالة متزايدة ام متناقصة ام ثابته ؟

١) $F(x)=-2x^3$



يبين التمثيل البياني ان قيم الدالة تتناقص كلما ازدادت قيم x لذلك متناقصة في الفترة $(\infty, -\infty)$

(للرسم نعوض بقيم اختيارية لـx وتنتج لنا قيم f(x)=y)

نحل عدديا"

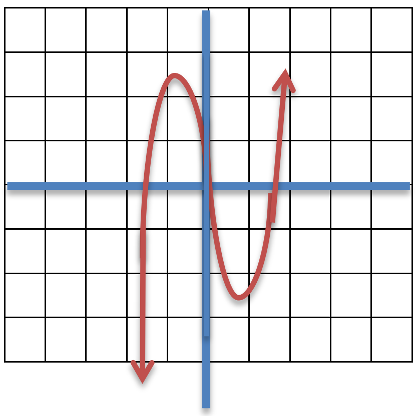
نعوض بقيم ل x ونلاحظ سلوك $f(x)$ عندها

x	- 4	- 2	0	2	4
F(x)	128	16	0	-16	-128

يوضح الجدول انه عندما تتزايد قيم x فإن قيم $f(x)$ تتناقص ، دالة متناقصة

٢) $G(x)=x^3-3x$

الحل:



يبين التمثيل البياني ان الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty,-1)$ ومتناقصة في الفترة (-1,1) ومتزايدة في الفترة $(1,\infty)$

الحل عدديا

$(-\infty,-1)$ متزايدة

X	-7	-5	-3	-1
F(x)	-322	-110	-18	2

(-1,1) متناقصة

X	-1	-0.5	0	1
F(x)	2	1.375	0	-2

$(1,\infty)$ متزايدة

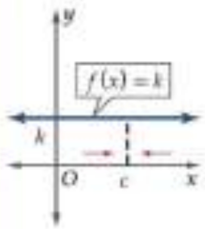
X	-1	3	5	7
F(x)	2	18	110	322

مفهوم أساسي نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

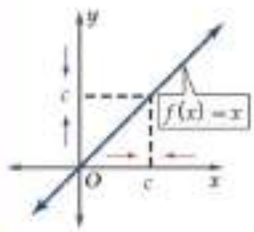
الرموز: $\lim_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \to c} x = c$



مفهوم أساسي خصائص النهايات

إذا كان c , k عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \to c} f(x)$, $\lim_{x \to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c} [k f(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.
وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$.

◄استعمل خصائص النهايات لحساب النهاية :

١) $\lim_{x \to 4}(x^2 - 6x + 3)$

$= \lim_{x \to 4} x^2 - \lim_{x \to 4} 6x + \lim_{x \to 4} 3$

$= (\lim_{x \to 4} x)^2 - 6 . \lim_{x \to 4} x + \lim_{x \to 4} 3$

$= 4^2 - 6.4 + 3 = -5$

مفهوم أساسي **نهايات الدوال**

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود، وكان c عدداً حقيقيًا، فإن $\lim_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ دالة نسبية، وكان c عدداً حقيقيًا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim_{x\to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$.

يمكن حساب نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية بالتعويض المباشر .

$$\lim_{x\to -1}(-3x^4 + 5x^3 + x + 4)$$

نستخدم التعويض المباشر ($x = -1$)

$$=-3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$

$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

عند استخدام التعويض المباشر ووصلنا الى صيغة غير محدده $\frac{0}{0}$ ، فإننا نبسط العبارة جبريا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار المشتركة .

$$\clubsuit \lim_{x\to 4}\frac{x^2 - x - 20}{x - 4}$$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ لذلك علينا تحليل المقدار جبريا .

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$

$$=\lim_{x\to 4} x - 5 = -4 - 5 = -9$$

$$\clubsuit \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

بالتعويض المباشر ينتج لنا $\frac{0}{0}$ لذلك نحلل ونبسط المقدار،(انطاق البسط) لأنه جذر.

$$== \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim \frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$$

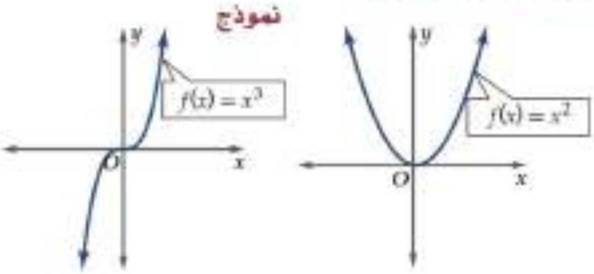
$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

مفهوم أساسي **نهايات دوال القوى عند المالانهاية**

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج



مفهوم أساسي **نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية**

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \ , \ \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

احسب النهاية : ♣ $\lim_{x \to \infty}(x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

♣ $\lim\limits_{x \to \infty}(5x^4 - 3x)$

$$= \lim_{x \to \infty} 5x^4$$

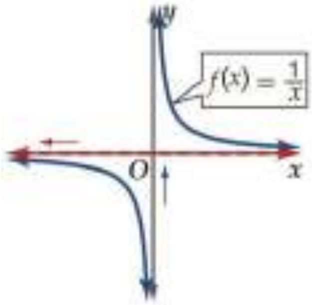
$$= 5 \lim_{x \to \infty} x^4$$

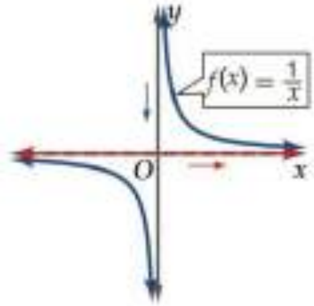
$$= 5 \times \infty = \infty$$

مفهوم أساسي نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n، فإن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$.

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو −∞، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

تستعمل هذا الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة على أعلى قوة لمتغير الدالة

احسب النهاية : $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$

اقسم كل حد على اعلى قوة وهي x^3

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{6\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to-\infty}3+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{6\,.\,0-0}{3+0}=0$$

احسب النهاية : $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{8x-3}$

درجة البسط والمقام متساوية والحدين الرئيسيين ***4x,8x*** ،

إذاً النهاية : $\frac{4x}{8x}=\frac{1}{2}$

المشتقـات :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

رمز المشتقة (خط مائل فوق الحرف $\grave{f}$)

♣اوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات ، ثم احسب المشتقة عندما x = 5 , 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(8x + 4h - 5)}{h} = \lim_{h\to 0} 8x + 4h - 5$$

$$= 8x + 4(0) - 5 = \mathbf{8x - 5}$$

أي ان المشتقة هي $f'(x) = 8x - 5$ والان نحسبها عندما *x=5 ,x=1*

$$f'(x) = 8(5) - 5 = 35 \qquad , \qquad f'(x) = 8(1) - 5 = 3$$

مفهوم أساسي قاعدة مشتقة دالة القوة

التعبير اللفظي: في مشتقة دالة القوة تكون قوة x أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

اوجد مشتقة الدالة :

$$♣\ f(x) = 2x^9$$

$$f'(x) = 2.9\,x^{9-1} = 18x^8$$

ونستطيع تطبيق هذه القاعدة لاشتقاق الجذور:
(حيث نحول الجذر الى قوى ونطبق القاعدة السابقة)

التحويل من جذر إلى قوى:

$$\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}} \rightarrow \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} \;,\quad \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} \rightarrow \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} \;,\quad \sqrt[3]{2^{50}} = 2^{\frac{50}{3}}$$

$$♣\, f(x) = \sqrt[5]{x^7}$$

نعيد كتابة الدالة كقوة

$$f'(x) = x^{\frac{7}{5}} \rightarrow \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1} \rightarrow \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} \rightarrow \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$$

مفهوم أساسي **قواعد أخرى للاشتقاق**

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوة: إذا كانت $f(x) = cx^n$، حيث c ثابت و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

اوجد مشتقة الدوال مما يأتي :

$$♣ f(x) = 5x^3 + 4$$

$$f'(x) = 5.3x^2 + 0 = 15x^2$$

$$♣ f(x) = x^5(2x^3 + 4)$$

$$f(x) = 2x^8 + 4x^5$$

$$f'(x) = 2.8x^7 + 4.5x^4$$

$$f'(x) = 16x^7 + 20x^4$$

✵ يمكن استخدام قواعد الاشتقاق لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية وايجاد ميل مماس منحنى

مثال 4 **السرعة المتجهة اللحظية**

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

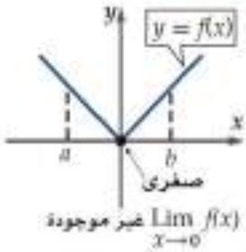
$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، والقوة، والدالة $f(x) = cx$، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسّط

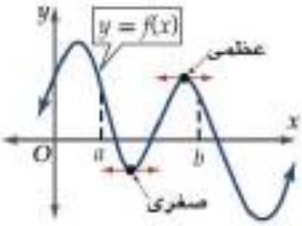
أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدث عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي — نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفي الفترة أو عند إحدى النقاط الحرجة.





مثال 5 من واقع الحياة — القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية : الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$$ الدالة المعطاة

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3\, t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0$$ قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق

$$= -t^2 + 8t$$ بسِّط

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$h'(t) = 0$$ اكتب المعادلة

$$-t^2 + 8t = 0$$ $h'(t) = -t^2 + 8t$

$$-t(t-8) = 0$$ حلِّل

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89$$ قيمة عظمى

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67$$ قيمة صغرى

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

قاعدة مشتقة عدد ثابت في دالة : يخرج الثابت وتشتق الدالة

$$y = cf(x) \quad \rightarrow \quad \grave{y} = c\grave{f}(x)$$

مفهوم أساسي قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f و g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

مثال 6 قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $g(x) = 3x^2 - 5$, $f(x) = x^3 - 2x + 7$ ، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 2$ قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3x^2 - 5$ من الفرض

$g'(x) = 6x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ عوّض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ بسّط

مفهوم أساسي قاعدة مشتقة القسمة

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

$h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$ (a

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3, g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى ، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت ، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوّض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسّط

❋ قاعدة السلسلة او التسلسل :

عندما يكون المطلوب اشتقاق دالتين متراكبتين $F = f \circ g$ ، نشتق الاولى بالنسبة للثانية ثم الثانية (مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس) :

أي ان : $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)).g'(x)$

استخداماتها :

- **قاعدة القوى 2 :** (عندما يكون الاس على الدالة ككل وليس المتغير فقط)

$$\frac{d}{dx}f(x)^n = nf(x)^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

مثال اوجد مشتقة الدالة : $f(x) = (x^2 - 1)^3$

$$\acute{f}(x) = 3(x^2 - 1)^{3-1} . 2x \quad \rightarrow \quad 6x(x^2 - 1)^2$$

اشتقينا القوس ثم ما بداخل القوس .

- قاعدة الجذور : لاشتقاق الجذور نستطيع تحويلها الى قوى ثم نطبق نفس القواعد السابقة ... وهناك طريقة اخرى خاصة بالجذور :

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{f(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$$

مثال اوجد مشتقة $\sqrt{3x^2 - 2}$

- الحل بقاعدة الجذور:

$$\frac{\frac{d}{dx}(3x^2 - 2)}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \rightarrow \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}} \rightarrow \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2}}$$

- الحل بقاعدة القوى :

$$\sqrt{3x^2 - 2} = (3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2}(3x^2 - 2)^{\frac{-1}{2}}.6x \rightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$$

مثال اوجد مشتقة $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1}$

- الحل بقاعدة الجذور:

$$\frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 3x + 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}} \rightarrow \frac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}}$$

- الحل بقاعدة القوى :

$$\sqrt[3]{x^2 - 3x + 1} = (x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 1)^{\frac{1}{3}-1} . 2x - 3$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 1)^{\frac{-2}{3}} . 2x - 3 \rightarrow \frac{2x - 3}{3(x^2 - 3x + 1)^{\frac{-2}{3}}}$$

$$\rightarrow \frac{2x - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}}$$

التكــامل :

مفهوم أساسي قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$ ، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1 ، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{k\,x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق إذا كان لـ $f(x)$ ، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$ ، $G(x)$ على الترتيب ، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

اوجد الدوال الاصلية : (نضيف واحد للأس ونقسم على العدد الناتج) ثم نضيف الثابت c

♣ $f(x) = 4x^7$

$$= \frac{4x^{7+1}}{7+1} + c \quad \rightarrow \quad \frac{4\,x^8}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}x^8 + c$$

♣ $f(x) = \frac{2}{x^4}$

$$= 2x^{-4} \quad \rightarrow \quad \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + c \quad \rightarrow \quad \frac{2x^{-3}}{-3} + c \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{3x^3} + c$$

❋ $f(x) = x^2 - 8x + 5$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + c$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + c$$

مفهوم أساسي التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ ، و C ثابت.

مفهوم أساسي النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

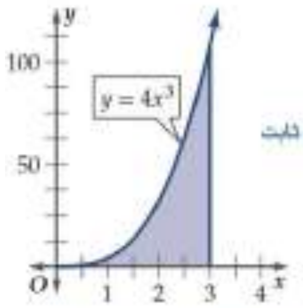
تطبيقات التكامل :

- **مساحة المنطقة الواقعة فوق محور X :**

مساحة المنطقة R الواقعة فوق المحور X وتحت منحنى الدالة f ، حيث

$a \leq x \leq b$ هي : $A = \int_a^b f(x)dx$

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:



a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

أولاً: أوجد الدالة الأصلية.

$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= x^4 + C$ بسِّط

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C)$ $a = 1 , b = 3$

$= 81 - 1 = 80$ بسِّط

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

- **مساحة المنطقة الواقعة تحت محور X :**

مساحة المنطقة R الواقعة تحت المحور X وفوق منحنى الدالة f ، حيث

$a \leq x \leq b$ ، هي : $A = -\int_a^b f(x)dx$

مثال : اوجد المساحة الواقعة فوق منحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{2} - 8$ وتحت محور X حيث $0 \leq x \leq 4$.

$$A = -\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} - 8\right)dx \rightarrow -\left[\frac{x^3}{6} - 8x\right]_0^4$$

$$= -\left(\left[\frac{64}{6} - 32\right] - [0]\right) \rightarrow -\left(-\frac{128}{6}\right) \rightarrow \frac{128}{6}$$

- **مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين :**

مساحة المنطقة R المحصورة بين منحنى f و g و محدوده با المستقيمين

a=x ، b=x هي : $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

مثال احسب المساحة المحصورة بمنحنى الدالتين: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = -x^2$

حيث : $0 \leq x \leq 4$

$$A = \int_0^4 [\sqrt{X} + X^2] \rightarrow \left[\frac{2X^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{X^3}{3}\right]_0^4 \rightarrow \frac{80}{3}$$

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C \quad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C \quad \text{بسّط}$$

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3 \quad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right] \quad a=2,\ b=3$$

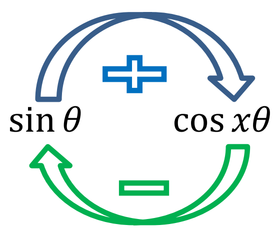
$$= 20.25 - 14 = 6.25 \quad \text{بسّط}$$

اشتقاق وتكامل الدوال المثلثية : (حفظ)

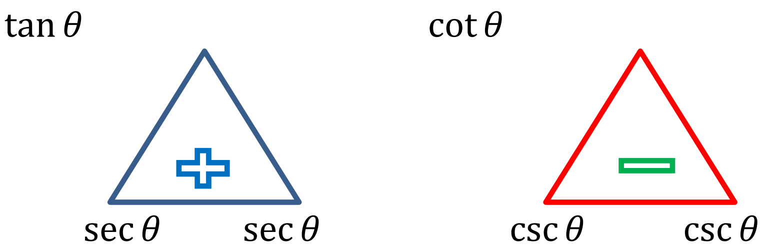
$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

 # طريقة مميزة لحفظ مشتقات الزوايا المثلثية:

المشتقة



$\cos'\theta = -\sin\theta$ ، $\sin'\theta = \cos\theta$



$\tan'\theta = (\sec\theta)^2$ $\cot'\theta = -(\csc\theta)^2$

$\sec'\theta = \tan\theta\sec\theta$ $\csc'\theta = -\cot\theta\csc\theta$

الدالة الأسية الطبيعية e^x :

خصائصها نفس خصائص الدالة الاسية العامة ،

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad . \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \infty \quad . \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

مشتقة الدالة الأسية الطبيعية : (e^x)

$\grave{e^x} = e^x$ **تنزل الدالة نفسها وتضرب في مشتقة الأس (هنا الأس x (متغير)**

مشتقته 1)

$\grave{e^u} = e^u \grave{u}$ **تنزل الدالة كما هي وتضرب في مشتقة الأس ((هنا الاس دالة))**

◀ مثال : $\grave{e^{2x}} = 2\,e^{2x}$

♣ **تكامل الدالة الأسية الطبيعية :**

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{3x-1}\,dx = \frac{e^{3x-1}}{3} + c$$

تنزل الدالة الاسية ونقسم على مشتقة الأس ثم نضيف الثابت

الدوال اللوغاريتمية الطبيعية :

$$\ln x = \log_e x$$

$$\ln x = y \quad \leftrightarrow \quad e^y = x$$

خصائصها:

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^n = n \ln x$$

$$e^{\ln x} = x$$

النهـايات :

اذا كان : $x > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

اذا كان $n\epsilon\mathbb{Z}^{+}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية الطبيعية :

اذا كان x متغير(أي عدد) و u دالة

$$\grave{\ln} x = \frac{1}{x} \quad , \grave{\ln} u = \frac{\grave{u}}{u}$$

الدالة اللوغاريتمية العامة :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية العامة :

$$\grave{\log}_a x = \frac{1}{x \ln x} \quad , \quad \grave{\log}_a u = \frac{1}{u \ln x} \cdot \grave{u}$$

اسئلـة المعيار الثامن

١- الحد السابع من المتتابعة 1,-2,4,-8,18

28	-128	64	-64

٢- اذا كان الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 6- والحد الخامس 162 فان الحد العام :

$2(-3)^{n-1}$	-$2(3)^{n-1}$	$2(3)^{n-1}$	-$2(-3)^{n-1}$

٣- الحد النوني للمتتابعة الهندسية : 2,16,128

$2(6)^{n-1}$	$2(-6)^{n-1}$	$2(8)^{n-1}$	$2(-8)^{n-1}$

٤- م

٤- متتابعة حسابية حدها الأول 27 وحدها السادس 12 ماهو الحد الرابع ؟

15	9	18	27

٥- تشكل قياسات زوايا مثلث متتابعة حسابية اذا كان قياس الزاوية الصغرى (36) فما قياس الكبرى ؟

75	90	97	84

٦- ما مجموع الأربع حدود الأولى للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 12(\frac{-1}{3})^n$

$\frac{1280}{81}$	$\frac{320}{27}$	$\frac{80}{9}$	$\frac{80}{81}$

٧- $\lim_{x\to 0} \frac{7x^3+1}{x+4x} =$

$-\infty$	0	∞	1

٨- اوجد مشتقة الدالة : f(x)=5 $\sqrt[3]{x^8}$

$\frac{40}{3}x^{\frac{-3}{5}}$	$\frac{40}{3}x^{\frac{-5}{3}}$	$\frac{40}{3}x^{\frac{3}{5}}$	$\frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$

٩- اوجد مشتقة : $y = \sqrt{2-x}$

$\frac{-1}{\sqrt{2-x}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$	$\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$	$\frac{1}{\sqrt{2-x}}$

١٠- $\int 4x^7 dx =$

0	1	$x^8 + c$	1/2 $x^8 + c$

١١- اذا كان $\int_0^2 kx\, dx = 6$ فما قيمة k ؟

2	*3*	*0*	∞

١٢- $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

0	-1	$-\infty$	1

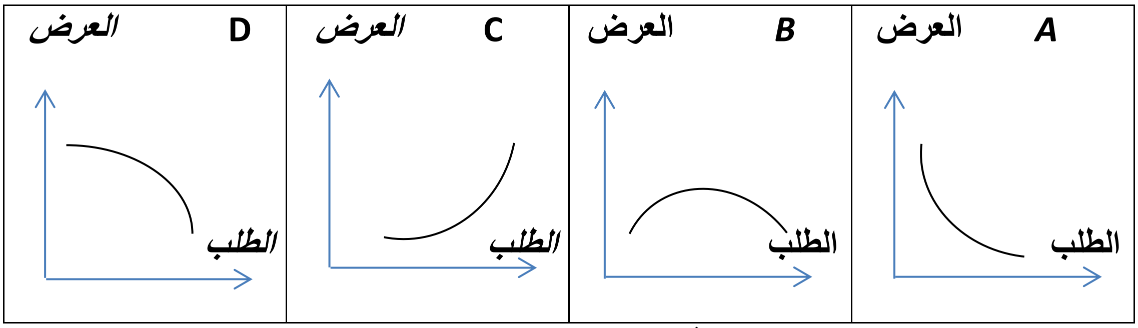
١٣- $\int \frac{\sin x}{(\cos x)^2}\, dx$

$\tan x$	$\sec x$	0	غير معرف

١٤- اوجد قيمة A؟ $\int_0^3 AX \quad dx = 9$

2	3	٠	9

١٥- في علم الاقتصاد تمثل العلاقة بين العرض والطلب ؟



١٦- مجموع المتسلسلة ....8+12+18

0	90	180	ليس لها مجموع

١٧- قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة متصلة :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & , \ x \le 2 \\ cx+6 & , x > 2 \end{cases}$$

$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

١٨- اوجد مجموعة حل المعادلة : $4x^2 - 3x - \ln\frac{1}{2} = \ln 2$

$\{0, \frac{3}{4}\}$	$(\frac{3}{4}, 0)$	$(-\infty, 4)$	$\{3,4\}$

١٩- اوجد المجموع : $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

∞	0	1	١

٢٠- احسب : $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$

0	1	∞	-1

٢١- اوجد مشتقة $Y = (x^2+1)^6$

$6(x^2+1)^5$	$6x(x^2+1)^5$	$12x(x^2+1)^5$	$12x(x^2)^5$

٢٢- اذا كانت الدالة زوجية فإن مشتقتها

زوجية	فردية	فرديه وزوجية	لاشي مما ذكر

٢٣- إذا كان المثلث ارتفاعه 6 وقاعدته 4 فإن مساحته ؟

$\int_0^6 \frac{2}{3}x$	$\int_0^6 \frac{3}{2}x$	$\int_0^4 \frac{3}{2}x$	$\int_0^4 \frac{2}{3}x$

٢٤-افضل طريقة للتكامل : $\int x^3 e^2 \ d(x)$

التجزيء	الكسور الجزئية	التعويض بدالة مثلثية	التعويض بدالة غير مثلثية

٢٥-اوجد مشتقة المقدار : $\frac{\sin x}{\tan x}$ ؟

$\cos x$	$-\sin x$	$(\sec x)^2$	$-\tan x$

٢٦-ماهو الحد 101 للمتتابعة : 5 , 10 , 20 ,.....

$5 . 2^{100}$	$5 . 2^{101}$	$5 + 2^{100}$	$5 + 2^{101}$

٢٧-أوجد قيمة a .. $\lim_{x\to 2} \sqrt{1+\sqrt{2x+a}} = 2$

-1	2	4	5

الحلــول :

١- المتسلسلة هندسية فيها $r = -2$, $a_1 = 1$

r= $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-2}{1} = -2$

r= $\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{-2} = -2$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \to a_7 = 1 \times -2^{7-1} = -2^6 = 64$$

٢-

$$r^{5-2} = \frac{162}{-6} \quad . \quad r^3 = -27 \quad . \ r = -3$$

الان نوجد المتتابعة وهي نضرب كل حد في -3 : 2,-6,18,..........

بما ان الحد الأول موجب 2 و r سالب اذا" الحد العام

$$a_1 r^{n-1} = 2(-3)^{n-1}$$

٣- الحد الأول $a_1 = 2$

نوجد r

r = $\frac{16}{2}$= 8

اذا" الحل: $2 \ (8)^{n-1}$

٤- نطرح الرتبتين من بعض

(6-1)d=12-27 , 5d =-15 , d=-3

$$a_4 = a_1 + (4-1)d = 27 - 9 = 18$$

٥- حدود المتتابعة لانها ثلاث زوايا n=3، ومجموع زوايا المثلث 180

$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

بالتعويض $180 = \frac{3}{2}[36 + a_3]$

والتبسيط $a_3 = 84$

٦-

$$= 12\left[(\frac{-1}{3})^0 + (\frac{-1}{3})^1 + (\frac{-1}{3})^2 + (\frac{-1}{3})^3\right]$$

بالتبسيط $= \frac{80}{9}$

٧- $\lim_{x\to 0} \frac{7x^3+1}{x+4x} = \frac{7(0)^3+1}{0+4(0)} = \frac{1}{0} = \infty$

٨- $y = (x)^{\frac{8}{3}}$ من خصائص الجذور

$$\grave{y} = 5\ \frac{8}{3}\ x^{\frac{8}{3}-1} \quad = \frac{40}{3} x^{\frac{5}{3}}$$

٩- مشتقة الجذر

$$\acute{y} = \frac{-1}{2y} = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$$

١٠- $4\int x^7 dx = 4\frac{x^8}{8} + c = \frac{1}{2}x^8 + c$

١١- تكامل محدود نوجد التكامل ثم نعوض بقيم الحدين

$$k\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^2 = 6 \quad \rightarrow \quad k\left[\frac{4}{2} - 0\right] = 6 \ \rightarrow 2k = 6 \ \rightarrow k = 3$$

١٢- $= \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} -2x \ \ e^{-x^2}\ dx$ نضرب في $\frac{2}{2}$ ونخرج المقام خارج التكامل لكي يتكون لنا داخل التكامل (دالة ومشتقتها) وعندها تخرج من التكامل

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-\infty^2} - e^{-(-\infty)^2}\right] = -\frac{1}{2}\left[e^{-\infty} - e^{-\infty}\right] = -\frac{1}{2}[0-0] = 0$$

١٣_ $\int \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x}$ نحللها

ومن المتطابقات المثلثية $\int \tan x \ \sec x \ \ dx = \sec x$

١٤-

$$A\int_0^3 X\ \ dx = 9 \quad \gg \quad A\ \left.\frac{X^2}{2}\right|_0^3 = 9$$

$$A\left(\frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 9$$

$$A\,\frac{9}{2} = 9 \ \gg A = 2$$

١٥- اذا زاد عرض سلعة ما في الاسواق وكانت متواجدة بكميات كبيرة فإن الطلب عليها سيقل .اما اذا كانت نادرة الوجود سيحاول الزبون الوصول اليها ، اذا" علاقة عكسية اذا زاد العرض قل الطلب : الحل هو الشكل A يمثل علاقة عكسية ، اما C يمثل الطردية


مفهوم أساسي الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:

١٦- نبحث التقارب والتباعد وذلك بإيجاد الاساس r بقسمة الحد الثاني على الحد الاول :

$r = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} > 1$ ، ***بما ان الاساس اكبر من 1 فإنها متباعدة وليس لها مجموع***

١٧- تكون الدالة متصلة اذا كانت: النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

2+3=2c+6

C= $-\frac{1}{2}$

١٨- يوجد قاعدة : $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$

$$4x^2 - 3\mathrm{x} - (-\ln 2) - \ln 2 = 0$$

$$4x^2 - 3\mathrm{x} = 0 \quad \rightarrow \quad x(4x-3) = 0$$

$X = 0 \quad , \quad 4x = 3 \quad \rightarrow x = \frac{3}{4}$

مجموعة الحل : $\{0, \frac{3}{4}\}$

١٩-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الاول $a_1 = 1$ والاساس $r = \frac{1}{2}$

حيث $|r| < 1$ ،، المتسلسلة تقاربية مجموعها : $s = \frac{a}{1-r}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

٢٠-

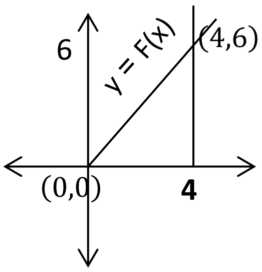
$$\sin\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\right] = \sin 0 = 0$$

٢١-

مشتقة القوس في مشتقة ما بداخل القوس

$$6(x^2+1)^5 . 2x = 12x(x^2+1)^5$$

٢٢- فردية (لإن الاشتقاق ننقص من الاس واحد) $x^4 \rightarrow 4x^3$



٢٣- القاعدة افقيه(x) ، الارتفاع رأسي (y)
التكامل المطلوب بالنسبة ل x
و هو المساحة تحت المنحنى y=f(x)
وفوق المحور x وبين المستقيمين x=4 , x=0
اذاً" نحذف اجابتين ويتبقى

$\int_0^4 \frac{3}{2}x$	$\int_0^4 \frac{2}{3}x$

نساوي التكامل بمساحة المثلث : $\frac{4\times6}{2} = 12$

$$\int_0^4 \frac{2}{3}x = \left[\frac{2}{3}\ \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[\frac{4^2}{3} - \frac{0^2}{3}\right] = \frac{16}{3} = 4 \neq 12$$

$$\int_0^4 \frac{3}{2}x = \left[\frac{3}{2}\ \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[\frac{3x^2}{4}\right]_0^4 = \left[\frac{3(4^2}{4} - \frac{3(0^2}{4}\right] = \left[\frac{48}{4}\right] = 12 = 12\ \checkmark$$

تحقق المطلوب وهي الاجابة الصحيحة .

٢٤-التجزيء

٢٥- من المتطابقات المثلثية : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} = \cos x$$

الان نشتق الناتج : $(\cos x)' = -\sin x$

او بتطبيق قانون مشتقة القسمة : $\left(\frac{\grave{f}}{g}\right) = \frac{f.\grave{g} - g.\grave{f}}{g^2}$

٢٦-نبحث نوع المتتابعة : $\frac{20}{10} = \frac{10}{5}$ نلاحظ ان النسبة ثابتة بين الحدود 2

إذاً" هندسية ، قانون الحد النوني للمتتابعة الهندسية هو :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_{101} = 5 \cdot 2^{100}$$

٢٧- تعويض مباشر بالنهاية : $\sqrt{1+\sqrt{2.2+a}} = 2$

$$\sqrt{1+\sqrt{4+a}}^{\,2} = 2^2 \rightarrow 1+\sqrt{4+a} = 4 \rightarrow \sqrt{4+a} = 3$$

$$\sqrt{4+a}^{\,2} = 3^2 \rightarrow 4+a = 9 \rightarrow a = 9-4 \rightarrow a = 5$$

المعيار : 9,10,11.12,13

المعيار ٣. ٤. ٩: يتعرف أساليب تعلم وتعليم الرياضيات وتقنياتها	١. يتعرف عناصر المعرفة الرياضية (مفاهيم وعلاقات ومهارات) وكيفية تحليلها وتدريسها وتقويمها ٢. يوظف بكفاءة طرائق واستراتيجيات تدريس الرياضيات التي تناسب المرحلتين المتوسطة والثانوية ٣. يتعرف مهارات التفكير الرياضي وأساليب تنميتها وتعليمها ٤. يتعرف نظريات التعلم المتعلقة بتعلم وتعليم الرياضيات وتطبيقاتها ٥. يوظف التقنيات الحديثة في تعلم وتعليم الرياضيات (الآلة الحاسبة بأنواعها، البرمجيات الحاسوبية، اليدويات،....)
المعيار ٣. ٤. ١٠: يتعرف طرق حل المسألة الرياضية واستراتيجياتها	١. يتعرف خطوات حل المسألة الرياضية ٢. يحدد استراتيجيات متعددة لحل مسألة رياضية محددة ويختار أنسبها للحل ٣. يوظف استراتيجيات متنوعة لحل مسائل رياضية تطبيقية
المعيار ٣. ٤. ١١: يتعرف التواصل الرياضي	١. يستخدم لغة الرياضيات للتعبير عن المفاهيم الرياضية بدقة ٢. يتعرف مهارات التواصل الرياضي بأنواعها ويوظفها في تواصله مع طلابه والآخرين ٣. يتعرف أساليب تنمية التواصل الرياضي لدى طلابه
المعيار ٣. ٤. ١٢: يتعرف الترابطات الرياضية	١. يظهر الترابط الرياضي بين المفاهيم والموضوعات الرياضية المختلفة ٢. يظهر علاقة الرياضيات بفروع المعرفة الأخرى ٣. يقدم تطبيقات رياضية في مجالات الحياة المختلفة
المعيار ٣. ٤. ١٣: يتعرف التمثيل الرياضي	١. يعرض المعرفة الرياضية بتمثيلات متنوعة ٢. يستعمل التمثيل الرياضي لنمذجة المحتوى الرياضي ٣. يستعمل التمثيل الرياضي لنمذجة وتفسير الظواهر الطبيعية

عناصر المعرفة الرياضية :

المفهوم الرياضي : هو المعنى المجرد للمصطلح ، ويجب ان تتوفر فيه شروط:

1) **يكون تجريد للخصائص المشتركة لمجموعة من الحقائق أو المواقف غير المتشابهة تماما"**
2) **يكون عاملا شاملا في تطبيقه فلا يشير إلى موقف معين بل يشير إلى كافة المواقف التي تتضمنها مجموعة ما .**
3) **ان يكون مصطلحا او رمزا ذا دلالة لفظية يمكن تعريفه .**

مثل المثلث هو معنى مجرد لمجموعة من الخواص التي تشترك فيها جميع المثلثات ، حيث يكون لها ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا فهذه الخواص لاتوجد إلا في المثلث بغض النظر عن انواعه ،وبمجرد ان نسمع كلمة مثلث يتبادر الى ذهننا شكله و خواصه ،

امثلة على المفاهيم: مربع ، دائرة ، ابدال ، توزيع ، جذور ، اسس ،تقاطع، تطابق

التعميمات : هي تكوين رياضي نتيجة الربط بين المفاهيم وهو علاقة بين أكثر من مفهوم .

وتشتمل على :

1) **القواعد : وهي جملة رياضية تعبر عن علاقة او عدة علاقات رياضية يمكن تطبيقها ، مثل قاعدة مجموع مكعبين ، فرق بين مربعين ...الخ**
2) **القوانين: هي صياغة كمية لظاهرة معينة تحدد التغيرات التي تطرأ عليها تحت تأثير عوامل كميه وكيفية معينه ومحدده ، مثل : قوانين الاسس و الجذور و القانون العام لحل المعادلات......الخ**
3) **النظريات: هي جمل رياضية يمكن اثباتها عن طريق المعلومات الرياضية ، تتصف بالثبات ولا تتغير إلا اذا تغيرت المعلومات الرياضية التي أدت إلى إثباتها ، مثل نظرية فيثاغورس ، نظرية طالس .... الخ**
4) **العمليات والعلاقات: تشتمل الرياضيات على علاقات لأنها مثل أي لغة تعبر عن علاقات في صور لفظية أو رمزية مثل** $\cup \; = \; > \; \ni \; \div \; \times$

المــهـــارات :

هي مجموعة من الاعمال التي يقوم بها المتعلم سواء كان ذلك عمل يدوي مثل رسم شكل ام كان عمل اجرائي مثل العمليات الحسابية ام ذهني مثل ادراك المفاهيم بشرط ان يتم ذلك بإتقان واقل وقت ممكن ، بمعنى تعرف كيفية عمل شي بسرعة ودقة .

مثل : مهارة اجراء العمليات ، حل المعادلات ، رسم الاشكال ....الخ

طرق التدريس :

مجموعة من الاجراءات والانشطة التي يقوم بها المعلم لتوصيل المحتوى التعليمي

تصنيف طرق التدريس:

عرض مباشر، الاكتشاف، حل المشكلات

١) مجموعة العرض المباشر:

يكون المعلم محور العملية التعليمية ومن اكثر الطرق شيوعا"

طريقة المحاضرة(التقليدية ،الالقائية): ينقل المعلومات بصورة شفهية .
تفيد في تعلم بعض المعلومات الرياضية التي صعب ان يصلوا إليها استنادا على معلوماتهم السابقة ، بحيث تعطيهم معلومات اساسية كنقطة بداية لتكوين خلفية معينة عن موضوع ما ،

انماط المحاضرة : محاضرة لفظية مجردة ، محاضرة لفظية مدعومة باسئلة، محاضرة مدعومة بوسائل تعليمية ،محاضرة مع استخدام عرض توضيحي، محاضرة مع استخدام الطباشير ،محاضرة مع النقاش،

٢) مجموعة الاكتشاف :
يكون المعلم موجه ومرشد والمتعلم يدرس ويفحص المعلومات من أكثر الطرق شيوعا"

الطريقة الاستنباطية :
الوصول من تعميمات إلى حالات خاصة وتستخدم إذا كان المعلم يسعى لتعليم (النظريات والقوانين) ، ولكي يستخدمها :
يطرح مشكلة مثيرة ، ثم يوجه اسئلة تساعد المتعلمين على اكتشاف التعميم ، يعطي عدة مشكلات توضح كيفية استخدام التعميم في الحل،
يكلفهم بحل مشكلات متنوعة باستخدام التعميم :
مثلا": لكي يصل المتعلمون للعلاقة $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$
يمكن أن يبدأ المعلم برسم دائرة الوحدة ورسم الزاوية x في وضعها القياسي ، و يسأل المتعلمين ماهي العلاقة بين اضلاع المثلث بمعلومية الزاوية ، ما هو الاحداثي السيني والاحداثي الصادي .... وهكذا حتى التوصل للعلاقة ،

الطريقة الاستقرائية :

الوصول من الحالات الخاصة إلى تعميمات ، ويقوم المعلم بخطوات حتى يتوصل إليها :

يعرض الحالة الفردية ، دراسة الحالة ، صياغة التعميم ثم اختبار صحته .

وهناك شروط قبل استخدام هذه الطريقة :
مراعاة طبيعة المفهوم ان لا تكون معقدة صعب اكتشافها ، يبدأ الدرس باكتشاف معلومات معروفة ويتقدم خطوة خطوة الى المعلومات الجديدة ، و يجب توفير امثلة عديدة وتطبق عليها التعاميم .

مثال : لكي يصل المتعلم إلى العلاقة بين الزوايا المركزية والمحيطية التي تشترك في القوس ، يبدأ المعلم بعرض مجموعة الزوايا المركزية والمحيطية التي تشترك بالقوس ثم يطلب من المتعلمين ايجاد قياسات الزوايا كل على حدة ، ثم يوجههم إلى البحث عن العلاقات بينهما والوصل للتعميم ، ويشجعهم على تجريب امثلة أخرى للتحقق .

٣) مجموعة حل المشكلات :

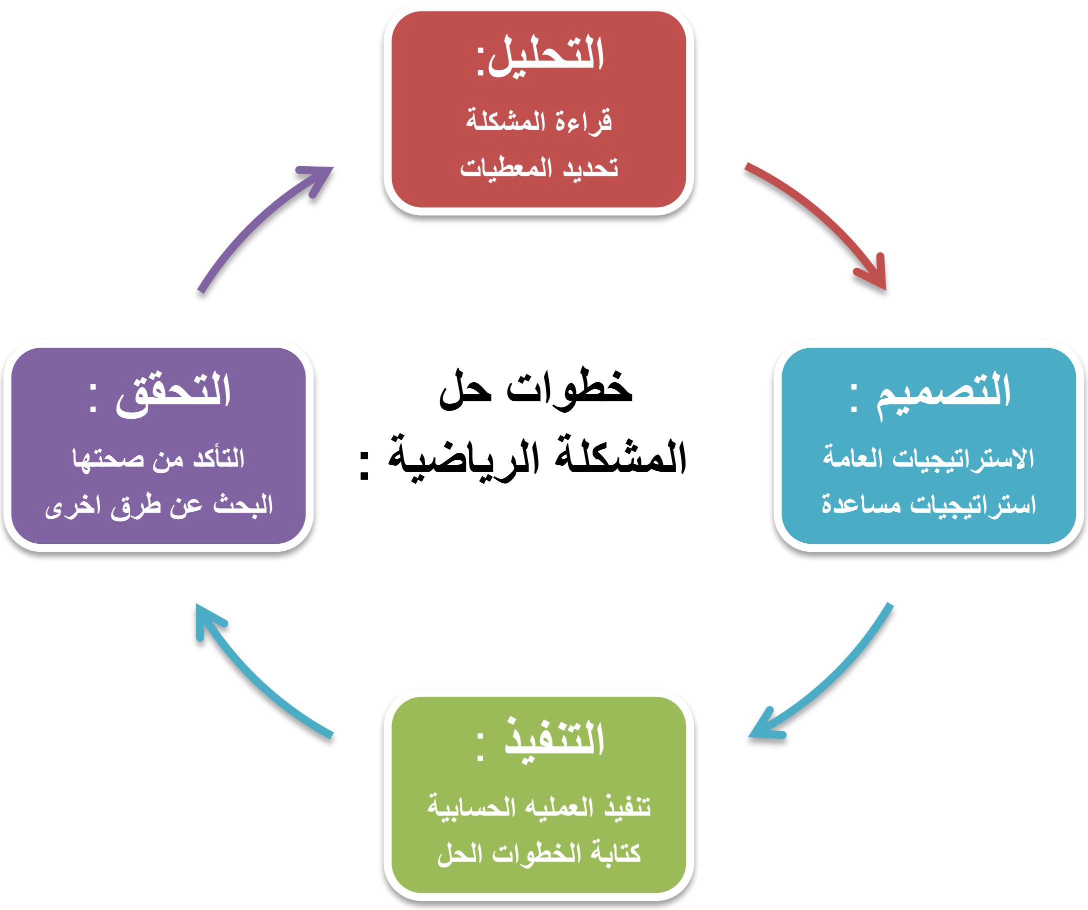
المشكلة الرياضية هي موقف رياضي يواجه المتعلم ويثير تحديا لتفكيره.

استراتيجيات حل المشكلة الرياضية :

- **الاستراتيجية العامة : خطه شمولية محددة المعالم مصممة لتوجيه فكر المتعلم نحو نقطة البدء للوصول إلى حل المشكلة ،وهناك عديد من الاستراتيجيات العامة من بينها :**
  - **استراتيجية الاستدلال المنطقي(التركيبية): البدء بمعطيات واستنتاج النتائج ثم استنتاج نتائج اخرى من هذه النتائج وهكذا حتى التوصل للمطلوب.**
  - **استراتيجية البدء من الخلف(التحليلية) : طريقة عامة في التفكير نبدأ بالقضية المطلوب اثباتها ونفرض انها صحيحة ثم نفكر بما يترتب على هذا الافتراض إن كان المترتب صحيحا" فإن الافتراض صحيح .**

- **الاستراتيجية المساعدة: تستخدم للمساعدة في تنفيذ الاستراتيجيات العامة**
  - **استراتيجية التأكيد على المعطيات والمطلوب: يحدد المتعلم الشروط المعطاة وما يسعى اليه ويمكن للمعلم أن يسأل اسئلة مثل مالذي تعرفه ؟ ما لذي تسعى لإيجاده**
  - **استراتيجية المحاولة والخطأ: يضع كل الاحتمالات امامه ثم يقيم كل احتمال في ضوء الشروط ثم يختار الذي يحققها ، ومن الممكن ان يتم بطريقتين (المحاولة والخطأ المنتظم وذلك بوضع كل الاحتمالات الممكنة ويقيم كل واحد ، او بطريقة المحاولة والخطأ الاستدلالية : يقوم المتعلم من البداية باستبعاد بعض الاحتمالات)**

- استراتيجية الانماط : فحص حالات خاصة والتوصل للحل وتعميمه .
- استراتيجية حل مشكلة ابسط: حل حالة خاصة او معالجتها من مشكلة معقدة الى بسيطة ويعمم الحل .
- استراتيجية العمل للخلف : الطريقة التحليلية وهي البدء بالمطلوب .
- استراتيجية المحاكاة : تمثيل الموقف ان امكن لتسهيل حلها عن طريق نموذج مادي ملموس او تنفيذه في الواقع .
- استراتيجية التمثيل بالرسم :رسم شكل بياني ، او شكل تخطيطي يظهر المشكلة
- استراتيجية تكوين جدول أو قائمة :تكوين جدول او قائمة تضم المعطيات وعلاقاتها لتسهيل ادراك العلاقة والوصول للحل .
- استراتيجية الجمل المفتوحة :تكوين معادلات من جمل رياضية مفتوحة معبرة عن المعطيات بالمشكلة وما بينها من علاقات باستخدام الرموز ، غالبا لا تستخدم استراتيجية لوحدها بل اكثر من واحد للوصول للحل



تصنيف الاهداف السلوكيـة :

المعرفية

المستوى	الاهداف
تذكر	يعدد، يعرف
فهم	يفسر، يحدد
تطبيق	يبرهن، يحسب
تحليل	يقارن، يستنتج
تركيب	ينظم، يعيد صياغة
تقويم	يتحقق، يبرر

الوجدانية

المستوى	الاهداف
الاستقبال	يتقبل،يهتم
الاستجابة	يشارك، يتحمس
اعطاء قيمة	يعتز، يقدر
تنظيم القيم	يؤمن ب، يلتزم ب
تكوين قيمة	يحترم ، يواظب

المهارية

المستوى	الاهداف
الملاحظة	يميز، يكتشف
الاستعداد	يظهر،يبدي استعداد
استجابة موجهه	يقلد ، يحاكي
الآلية والتعويد	يرسم، يقيس بدقة
الاستجابه المعقدة	ينفذ، يقيس بسرعة
التكييات اوالتعديل	يعدل، يعيد تنظيم
الابداع او الاصالة	يبدع، يبتكر

نظريات التعلم :

النظرية	السلوكية	المعرفية	البنائية
المحتوى	المهام التي تستدعي مهارات التفكير الاولية (تذكر، فهم، تطبيق)	حل المشكلات التي تتطلب مهارات التفكير المتقدمة (فهم، تطبيق، تحليل ، تقييم، ابداع)	حل المشكلات غير المحددة باستخدام مهارات التفكير المتقدمة (فهم، تطبيق، تحليل، تقييم، ابداع)
دور المعلم	يوجه الى الجواب الصحيح من خلال وسائل و استراتيجيات مختلفة	يتيح للمتعلم وسائل الربط بين المعارف الجديدة والمكتسبة	يساعد المتعلم في اكتشاف وضعيات التعلم والفهم الذاتي عبر طرح اسئلة مناسبة
دور المتعلم	سلبي ،يتلقى المعرفة ولايتفاعل الا عند الاستجابة لمثير خارجي	نشط، يقوم بفهم واستقبال ومعالجة وتخزين المعلومات و استدعائها عند الحاجة	عنصر فعال، يبني تعلمه ويفسر ما يستقبله من معلومات بناء على التجربة الشخصية
كيف يحدث التعلم	الاستجابة لمثيرات تتغير اثناء الانتقال الى وضعيات عامة او جديدة	استدعاء المعلومات السابقة واستخدامها في وضعية جديدة	استخدام المعارف السابقة في وضعية من سياق الحياة العامة
العلماء	بافلوف ، ثورندايك سكنر ، واطسون	برونر ، اوزبل ،رايجلوث	بياجيه ، جون ديوي

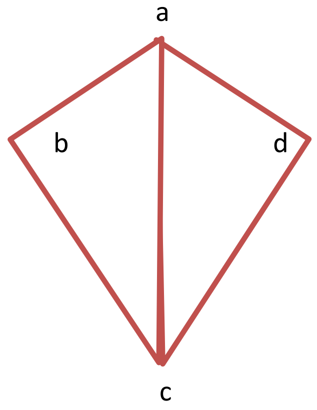
مهارات التفكير الرياضي :

التفكير الرياضي : شكل من اشكال النشاط العقلي الخاص بالرياضيات الذي يعتمد على مجموعة من المظاهر الخاصة بالتفكير الاستدلالي (استقرائي استنباطي).

اساليب التفكير الرياضي :

1) **التفكير الدقيق :اسلوب يتميز بالدقة ويصف الموقف وصف كمي دقيقي .**
   - **في السنوات الاخيرة ازداد عدد خريجي الرياضيات بمكة زيادة كبيرة**
   - **في السنوات الاخيرة ازداد عدد خريجي الرياضيات بمكة ٢٠%**

   المثال الثاني يمثل التفكير الدقيق اما الاول جملة وصفية .
   ويكسب المعلم التلاميذ هذا التفكير عن طريق :
   ان يكو دقيق في التعبير عن افكاره ، ويطالبهم بالدقة في التفكير .
2) **التفكير التأملي: يتأمل المتعلم الموقف ويحلله ويرسم خطة ليصل للنتائج .**
   مثال :الشكل التالي فيه $|ab| = |ad|\ ,\ \llcorner b = \llcorner d = 90$
   اثبت ان : $cd = cb$
   الحل : المعطيات أن الشكل رباعي وفيه
   $|ab| = |ad|\ ,\ \llcorner b = \llcorner d = 90$
   المطلوب :اثبات ان $cd = cb$
   كيف يمكن اثبات تساوي قطعتي مستقيم ؟
   نستخدم فرضين : هل القطعتان ضلعان في شكل هندسي منتظم ومن خصائص الشكل ان طوليهما متساويان ؟ لا
   الفرض الثاني : هل القطعتان المستقيمتان ضلعان متناظران في شكلين متطابقين ؟ نعم ، من المعطيات استنتجنا انهما متطابقان
   إذا" جميع اضلاعهم متطابقة ، $|cd| = |cb|$
   ويكتسب التلاميذ هذا التفكير عن طريق :
   التأمل في رأس المسألة ، يفحص عباراتها ، فرض الفروض ،تقويم طريقة الحل هل هي مناسبة ام ان هناك طريقة افضل منها



3) **التفكير الاستقرائي : جزئيات الى عموميات (سبق شرحه)**
   يستطيع المعلم ان يكسب المتعلمين هذه الطريقة :
   تقديم مجموعة متنوعة من الامثلة الفردية التي تشترك في خاصية رياضية وبعض الامثلة التي لاتتوفر بها هذه الخاصية ، دراسة الأمثلة التي توصل الى اكتشاف الخاصية المشتركة في هذه الامثلة، استنتاج وصياغة عبارة تمثل هذه الخاصية المشتركة .
4) **التفكير الاستنباطي : عموميات الى جزئيات (سبق شرحه)**
   يستطيع المعلم اكساب التلاميذ هذه الطريقة :
   عن طريق توضيح ان كل خطوة من خطوات التفكير الاستنباطي لابد ان تكون مدعومة بقضية صحيحة واي خطوة غير مدعمة لا تعتبر صحيحة

٥) التفكير الناقد : يعتمد على التحليل والفرز والاختيار ، الامتناع عن اصدار احكام الا اذا اكتملت الادلة ، مميزاته : الدقة في البحث ، الوضوح التام ،المرونة ، اتخاذ موقف محدد ، عدم الاندفاع والتريث .
ويكسب المعلم التلاميذ هذا التفكير عن طريق :
تدريبهم على التعرف على المواقف وتحديدها ، مناقشتهم في صحة كل خطوة ،تعويدهم على عدم اصدار الاحكام دون اكتمال الادلة ،تعليمهم كيفية السيطرة على اندفاعهم ، اشراكهم في النقاش .
٦) التفكير المنطقي : استخلاص التضمينات من المقدمات
٧) التفكير العلاقي: ادراك العلاقات بين العوامل المختلفة ، اذا ادرك المتعلم العلاقة بينها ادراك سليم ادى الى الحل السليم .
ويكسب المعلم التلاميذ هذا التفكير عن طريق :
يعطي المتعلم فرصة لقراءة المسألة ، رسم خطة لمناقشة المتعلمين ، تدريبهم على ادراك العلاقات المختلفة بين عناصر كل خطوة .
٨) التفكير الحدسي: هو التفكير الذي يختص بالاكتشاف الرياضي .

خطوات حل المسألة بطريقة صحيحة:

١) الفهم: ويكون ذلك من خلال وضع المعطيات أو الفرضيّات، وتكون بشكلٍ واضح ومرتّب، ويجب تحديدها قبل البدْء بالحل، ثمّ تحديد المطلوب من المسألة من أجلِ التخطيط للحلّ.
٢) التخطيط: ويكونُ ذلك من خلال التفكير بالطريقة التي يمكنُ بها حلّ المسألة،
٣) الحلّ: ويتم فيها تطبيق خطّة الحل التي تمّ التخطيط له من قبل، ويكونُ الحلّ من خلال تطبيق واحدة من العمليات الحسابيّة بشكلٍ منطقي ومناسب بين المعطيات والمطلوب.
٤) التحقّق من الحل: ويتم الرجوع من نهاية المسألة إلى بدايتها، واستخدام الحلّ للحصول على المعطيات، أي بشكلٍ عكسيّ.

استراتيجيات حل المسألة الرياضية وامثلة عليها :

- **البحث عن نمط :**

طلال : أتدرَّب على تنفيذ ركلات الجزاء كلَّ يوم بعد المدرسة استعدادًا لمباريات كرة القدم المدرسية. والآن يمكنني أن أسجل ثلاثة أهداف من كلِّ ٥ ركلات.

مهمتك : البحث عن نمط لمعرفة عدد الأهداف التي يحرزها طلال من ٣٠ ركلة.

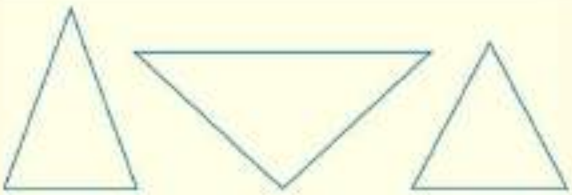
افهم	يبلغ معدّل الأهداف التي يسجلها طلال ٣ من كلّ ٥ ركلات، والمطلوب معرفة عدد الأهداف التي يمكن أن يسجلها من ٣٠ ركلة.
خطط	ابحث عن نمط، ثُمَّ وسّعهُ لإيجاد الحلّ.
حل	(الجدول أدناه)
تحقق	يُسجل طلال أهدافًا أكثر بقليل من نصف عدد الركلات، وبما أنّ ١٨ أكثر بقليل من ١٥، إذن الإجابة معقولة. ✓

الأهداف	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨
الركلات	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠

- **التبرير المنطقي :**

سمير : أعلم أنّ ضلعين على الأقل من أضلاع المثلث المتطابق الضلعين متطابقان. ويبدو أنّ زاويتين من زوايا هذا المثلث متطابقتان أيضًا.

مهمتك : استعمل التبرير المنطقي لإيجاد ما إذا كانت الزوايا في المثلث المتطابق الضلعين متطابقة.

افهم	المثلثات المتطابقة الضلعين فيها على الأقل ضلعان متطابقان. نحتاج إلى أن نعرف إن كان هناك علاقة بين زوايا كل مثلث منها.
خطط	ارسم عدة مثلثات متطابقة الضلعين، ثم قس زواياها.
حل	 يوجد في كل مثلث زاويتان متطابقتان؛ لذا يبدو أنّه يوجد في المثلث المتطابق الضلعين زاويتان متطابقتان.
تحقق	حاول رسم مثلثات أخرى متطابقة الضلعين، وقس زواياها. وعلى الرغم من أنّ هذا ليس دليلًا كافيًا، إلا أن استنتاجك سيكون صحيحًا.

- **الحل عكسيا" :**

طارق: معي مبلغ من المال أنفقت منه ٥,٥٠ ريالات في مطعم، وأربعة أضعاف هذا المبلغ في المكتبة. وتبقّى معي الآن ٧,٧٥ ريالات.

مهمتك: حُلّ عكسيًا لإيجاد المبلغ الذي كان مع طارق قبل ذهابه إلى المطعم والمكتبة.

افهم	المبلغ المتبقّي معه ٧,٧٥ ريالات، والمطلوب إيجاد المبلغ الذي كان معه في البداية.	
خطّط	ابدأ بالنتيجة النهائية، ثم حلّ عكسيًا.	
حُلّ	بقي معه ٧,٧٥ ريالات. **ارجعْ خطوةً في المسألة :** أنفق أربعة أضعاف ٥,٥٠ ريالات في المكتبة. بما أن ٥,٥٠ × ٤ = ٢٢ ريالًا، لذا اجمع ٢٢ ريالًا و ٧,٧٥ ريالات. **ارجعْ خطوةً أخرى:** ٥,٥٠ ريالاتٍ التي أنفقها في المطعم. اجمع ٥,٥٠ ريالاتٍ و ٢٩,٧٥ ريالًا. إذن، كان مع طارق في البداية ٣٥,٢٥ ريالًا.	٧,٧٥ + ٢٢,٠٠ ٢٩,٧٥ ريالًا + ٥,٥٠ ٣٥,٢٥ ريالًا
تحقّق	افترض أنّ مع طارق ٣٥,٢٥ ريالًا. بعد المطعم أصبح معه: ٣٥,٢٥ − ٥,٥٠ = ٢٩,٧٥ ريالًا. ثم أنفق في المكتبة أربعة أضعاف ما أنفقه في المطعم؛ لذا أصبح معه: ٢٩,٧٥ − ٤ (٥,٥٠) = ٧,٧٥ ريالات. إذن ٣٥,٢٥ ريالًا جواب صحيح. ✓	

- **التخمين والتحقق :**

سعد: يتقاضى محلّ لغسيل السيّارات ١٠ ريالاتٍ مقابل غسيل السيّارة الصغيرة، و ٢٠ ريالًا مقابل غسيل السيّارة الكبيرة.

في أحد الأيام تمّ غسيل ١٠ سياراتٍ بقيمة إجماليّة ١٤٠ ريالًا.

مهمتك: استعمل استراتيجية «التّخمين والتحقّق» لإيجاد عدد السيارات التي تمّ غسيلها من كل نوع.

افهم	تعلم أنّ غسيل السيارة الصغيرة يكلّف ١٠ ريالات، وغسيل الكبيرة يكلّف ٢٠ ريالًا.	
خطّط	خمّن ثمّ تحقق، عدّل التخمين حتى تتوصّل إلى الإجابة الصّحيحة.	
حُلّ	خمّن غسيل ٥ سيارات صغيرة و ٥ كبيرة: ٥ (١٠) + ٥ (٢٠) = ١٥٠ ريالًا قلّل عدد السيارات الكبيرة. غسيل ٧ سيارات صغيرة و ٣ كبيرة: ٧ (١٠) + ٣ (٢٠) = ١٣٠ ريالًا قلّل عدد السيارات الصغيرة. غسيل ٦ سيارات صغيرة و ٤ كبيرة: ٦ (١٠) + ٤ (٢٠) = ١٤٠ ريالًا لذا، فقد تمّ غسيل ٦ سيارات صغيرة و ٤ كبيرة.	أكثر من ١٤٠ أقل من ١٤٠ صحيح ✓
تحقّق	تكلفة غسيل ٦ سيارات صغيرة: ٦٠ ريالًا، وتكلفة غسيل ٤ سيارات كبيرة: ٨٠ ريالًا وبما أن ٦٠ + ٨٠ = ١٤٠ . إذن التّخمين صحيح.	

● **تحديد معقولية الحل:**

عامر: تم دهن ٢٥٪ من غرفتي خلال ٢٨ دقيقة. وأعتقد أنّ دهان غرفتي كاملًا سيحتاج إلى ٣ ساعات على وجه التقريب.

مهمتك: حدِّد ما إذا كان منطقيًا أن ينتهي الدّهّانُ من دهن غرفة عامر في ٣ ساعات.

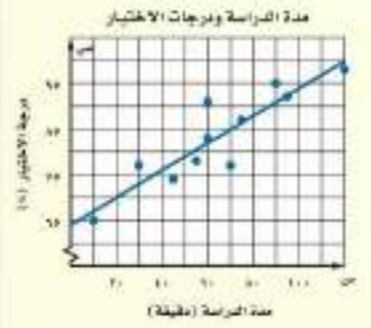
افهم	تمّ دهان ٢٥٪ من الغرفة خلال ٢٨ دقيقة، ويعتقد عامر أنّ دهان الغرفة كاملة سيستغرق ٣ ساعات.
خطط	بما أنّ ٢٥٪، أيّ $\frac{1}{4}$ الغرفة قد تمّ دهانها خلال ٣٠ دقيقة تقريبًا، فإنّ استعمال نموذج يقسم ١٠٠٪ إلى أقسام متساوية يمثل كلٌّ منها ٢٥٪ يؤدي إلى حل المسألة.
حُلّ	قرّب ٢٨ دقيقة إلى ٣٠ دقيقة.  ٣٠ دقيقة × ٤ = ١٢٠ دقيقة ١٢٠ دقيقة = ساعتين لهذا فإنّ تقدير عامر بأنّ الدّهان سيحتاج إلى ٣ ساعات غير مناسب، والتقدير الأفضل هو ساعتان.
تحقّق	٣٠ دقيقة تساوي $\frac{1}{2}$ ساعة. بما أنّ $\frac{1}{2}$ × ٤ = ٢، فإنّ الإجابة المعقولة هي ساعتان. ✔

● **التمثيل البياني :**

حسن: يبين الجدول التالي مدة الدراسة ودرجات اختبار ١١ طالبًا في اللغة الإنجليزية.

مهمتك: استعمال التمثيل البياني لتتنبأ بدرجة طالب درس مدة ٨٠ دقيقة.

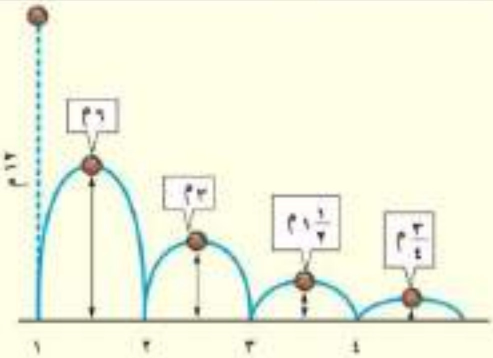
مدة الدراسة ودرجات الاختبار											
مدة الدراسة (دقيقة)	١٢٠	٣٠	٦٠	٩٥	٧٠	٥٥	٩٠	٤٥	٧٥	٦٠	١٠
درجة الاختبار (٪)	٩٨	٧٧	٩١	٩٣	٧٧	٧٨	٩٥	٧٤	٨٧	٨٣	٦٥

افهم	أنت تعلم عدد دقائق الدراسة، وتريد التنبؤ بدرجة الاختبار.	
خطط	مثّل البيانات؛ لتسهّل على نفسك ملاحظة اتجاهات التغير بين مدة الدراسة والدرجة.	
حُلّ	يبين التمثيل البياني أنه كلما زادت مدة الدراسة، زادت درجة الاختبار، ويمكنك التنبؤ بأن درجة طالب درس مدة ٨٠ دقيقة هي ٨٨٪ تقريبًا.	
تحقّق	ارسم خطًا يكون قريبًا من معظم النقاط قدر الإمكان كما هو مبين في الشكل، ويُلاحظ أنّ التقدير قريب من الخط؛ لذا فالتنبؤ معقول.	

●**الـــرسم :**

سالم: أُلقيت كرة من ارتفاع ١٢ مترًا، فوصلت إلى الأرض، ثم ارتدت إلى نصف الارتفاع الذي سقطت منه. وتكرر ذلك في جميع الارتدادات المتتابعة.

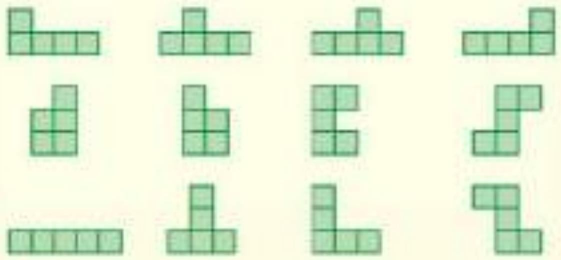
المطلوب: ارسم شكلًا لإيجاد الارتفاع الذي تصله الكرة في الارتداد الرابع.

افهم	تعلمُ أنّ الكرة أُلقيت من ارتفاع ١٢ م، وارتدت لترتفع إلى نصف المسافة.
خطط	ارسمْ شكلًا يبيّن الارتفاع الذي تصله الكرة بعد كلّ ارتداد.
حُل	 تصل الكرة إلى ارتفاع $\frac{٣}{٤}$ م في الارتداد الرابع
تحقق	ابدأ من ارتفاع ١٢ مترًا، واضربه في $\frac{١}{٢}$ أربع مرات، $١٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

- **انشاء نموذج :**

وليد: في معمل الحاسب، أحاول أن أصمم لعبة تتطلب أن يقوم اللاعب بترتيب خمسة مربعات.

مهمتك: أنشئ نموذجًا لأجد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن بها ترتيب خمسة مربعات متلاصقة جنبًا إلى جنب لتكوّن شكلًا واحدًا.

افهم	تعلم أنه يجب ترتيب المربعات الخمسة متلاصقة جنبًا إلى جنب، والمطلوب تحديد عدد الطرائق الممكنة لعمل ذلك.
خطط	أنشئْ نموذجًا لتوضح تلك الطرائق المختلفة لترتيب المربعات.
حُل	 هناك ١٢ طريقة ممكنة لترتيب المربعات.
تحقق	تحقق من أن النماذج أعلاه تتضمن جميع الطرائق الممكنة لترتيب المربعات، ولاحظ أن الدوران فقط لا ينتج عنه طريقة جديدة، في حين أن الانعكاس قد ينتج عنه طريقة جديدة.

- **استخدام اشكال فن :**

سامي : اشترك ١٥ طالبًا من الصف الثاني المتوسط في النشاط المدرسي، ٤ منهم في نشاط الإذاعة المدرسية، و٧ في نشاط التوعية الإسلامية، واثنان في النشاطين معًا.

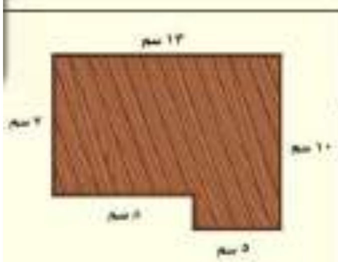
مهمتك : استعمل شكل فن لإيجاد عدد الطلاب الذين لم يشتركوا في أيٍّ من النشاطين.

افهم	تعرف عدد الطلاب المشاركين في الإذاعة المدرسية، وفي التوعية الإسلامية، وتعرف عدد الطلاب المشاركين في النشاطين معًا.
خطط	استعمل شكل فن لتنظيم البيانات.
حل	 ارسم دائرتين متقاطعتين تمثلان النشاطين. بما أنه يوجد طالبان في كلا النشاطين فضع ٢ في الجزء المشترك من الدائرتين. استعمل الطرح لتحدد العدد في الجزأين المتبقيين. عدد الطلاب المشاركين في الإذاعة المدرسية فقط = ٤ − ٢ = ٢ عدد الطلاب المشاركين في التوعية الإسلامية فقط = ٧ − ٢ = ٥ عدد الطلاب الذين لم يشتركوا في أيٍّ من النشاطين = ١٥ − ٢ − ٢ − ٥ = ٦ إذن هناك ٦ طلاب في الصف لم يشتركوا في أيٍّ من النشاطين.
تحقق	تأكد أن كل دائرة تمثل العدد المناسب من الطلاب.

- **تحديد مسألة ابسط :**

عبد المجيد: سأقوم أنا وأصدقائي في يوم النشاط المدرسي بطلاء لوح خشبي، ولشراء الأدوات اللازمة نرغب في معرفة المساحة التي سنقوم بطلائها. ويبين الشكل التالي اللّوح المراد طلاؤه.

مهمتك: إيجاد المساحة المراد طلاؤها.

افهم	تعرف أن اللوح الخشبي مكوّن من مستطيلين.	
خطط	احسب مساحة كل مستطيل، ثم قم بجمع المساحتين.	
حل	مساحة المستطيل الأول م١ = الطول × العرض = ١٠ × ٥ = ٥٠ سم² مساحة المستطيل الثاني م٢ = الطول × العرض = ٨ × ٧ = ٥٦ سم² المساحة الكلية = ٥٠ + ٥٦ = ١٠٦ سم².	
تحقق	تقل المساحة الكلية عن ١٠ × ١٣ = ١٣٠ سم². الإجابة ١٠٦ معقولة.	

- **تمثيل المسألة :**

مصطفى: سأتقدم إلى اختبار في اللغة العربية. فهل تعتقد أن طريقة إلقاء قطعة نقدية ستكون طريقة جيدة لحل (٥) أسئلة من نوع الصواب أو الخطأ.

مهمتك: مثّل المسألة لتحديد ما إذا كان إلقاء قطعة نقدية طريقة جيدة لإجابة أسئلة من نوع الصواب أو الخطأ.

افهم
عدد أسئلة الصواب أو الخطأ في الاختبار (٥). يمكنك القيام بالتجربة لاختبار ما إذا كان إلقاء القطعة النقدية طريقة جيدة لحل الأسئلة والحصول على علامة جيدة.

خطّط
ألقِ قطعة نقدية ٥ مرات، فتكون الإجابة صحيحة إذا ظهرت الكتابة، وخطأ إذا ظهر الشعار وكرّر المحاولة ٣ مرات.

حُلّ
افترض أن الإجابات الصحيحة للاختبار هي صواب، خطأ، خطأ، صواب، خطأ.

الإجابات	صواب	خطأ	خطأ	صواب	خطأ	عدد الإجابات الصحيحة
المحاولة ١	صواب	صواب	خطأ	خطأ	صواب	٢
المحاولة ٢	خطأ	خطأ	صواب	صواب	خطأ	٣
المحاولة ٣	صواب	خطأ	صواب	خطأ	صواب	٢

ضع دائرة حول الإجابات التي تتفق مع الإجابات الصحيحة في كل محاولة. بما أن محاولات التجربة أعطت ٢، ٣ إجابات صحيحة لأسئلة الاختبار المكون من ٥ أسئلة، فإن إلقاء القطعة النقدية لإجابة أسئلة الصواب أو الخطأ ليست طريقة جيدة للحصول على علامة جيدة في الاختبار.

تحقّق
تحقق بإعادة المحاولة عدة مرات.

لغة الرياضيات : الرياضيات ليست مجرد وسيلة لمساعدة الإنسان على التفكير و حل المشكلات و ولكنها وسيلة هامة جداً في تبادل مجموعة من الأفكار بوضوح ودقة ولذلك فهي تعتبر لغة العلم ،
وتعتبر لغة صعبة عندما يركز التدريس على حفظ المصطلحات عن تبادل الأفكار، ومن هنا يجد الأغلبية من الدارسين الرياضيات شيئاً غير مفهوم لأنهم لا يعرفون معنى للمصطلحات الرياضية . لذلك على المعلمين بالتأكد من فهم التلاميذ للسؤال المطروح عليهم، أو العبارة الرياضية التي يقرئونها .

سمات تتسم بها لغة الرياضيات وهي كما يلي :
1- الرياضيات كلغة مكتوبة : يقال انها لغة رمزية، ولذلك فهي لغة خاصة جداً،و من جهة أخرى فهي لها علاقة باللغات الأخرى حيث أن الرموز الجبرية تُأخذ من اللغة اللاتينية، أما رموز الهندسة وحساب المثلثات .... فتُأخذ من اللغة اليونانية.
2- الرياضيات كلغة شفوية : اللغة الشفهية هي شيء جوهري للذاكرة، فالتلاميذ الذين لديهم صعوبات في قراءة الرياضيات يؤدي بهم الأمر إلى صعوبات في عملية الفهم، فالرياضيات كلغة شفوية تساعد التلاميذ على فهم المفاهيم الرياضية وذلك من خلال الشرح أو المناقشة.
3- الرياضيات كلغة تصويرية : للرياضيات شكل ثالث من أشكال التعبير وهو شكلها التصويري أو التمثيلي، وأكثر الأمثلة وضوحاً على هذا هو الرسوم البيانية ،والجداول والخرائط والأشكال.
4- الرياضيات كلغة أجنبية : أحد الأسباب الهامة التي تجعل الرياضيات لغة أجنبية بالنسبة للكثير من التلاميذ هو أنها يتم تعلمها بشكلٍ رسمي في المدرسة كما أن التلاميذ لا يتحدثون بها في المنزل.
5- الرياضيات كلغة خاملة :لا أحد يستطيع أن يدعي أن الرياضيات لغة ليست لها أهمية لأنها كثيراً ما تستخدم في الحياةِ اليومية ولا يمكن الاستغناء عنها.
6- الرياضيات كلغة مجردة : علماء الرياضيات يذكرون أن الرياضيات لغة غير محسوسة وهنا تكمن صعوبة الرياضيات، فلكي تكون الرياضيات لغة سهلة محسوسة يجب أن تكون لغة تستخدم التطبيق العملي لاستنتاج النتائج،كما يمكن أن توجد النتائج من خلال الخبرة السابقة للتلميذ.
7- الرياضيات كلغة قومية : من المعلوم أن اللغة القومية يتم تعلمها بشكلٍ جيد بواسطة الجميع ولذلك فإنه لو كان بإمكاننا جعل الرياضيات كاللغةِ الأم فإنه يمكن لأيٍ شخص تعلم قدر كبير من المفاهيم الرياضية،ولكي يتم جعل الرياضيات كاللغة الأم يجب أن يتعامل الطفل بها مع من حوله. ومن جهةٍ أخرى فإن الرياضيات كلغة تؤدي إلى أن الرياضيات في مضمونها نشاطٌ اجتماعي

التواصل الرياضي :

هو قدرة المتعلم على استخدام لغة الرياضيات بما تحويهِ من رموز ومصطلحات وتعبيرات للتعبير عن الأفكار والعلاقات وفهمها وتوضيحها للآخرين

مهارات التواصل الرياضي :

يجب أن يكون التلميذ قادراً على أن:

١) تنظيم التفكير الرياضي وتمثيل المواقف والعلاقات الرياضية بصورٍ مختلفة-
يتعرف على الصياغات المتكافئة لنفس النص الرياضي .
-يعبر عن الأفكار الرياضية بصورة كتابية .
-يعبر عن التعميمات الرياضية التي يتم اكتشافها من خلال الاستقراء .
-يترجم النصوص الرياضية من أحد أشكال التعبير الرياضي(كلمات-جدول-شكل هندسي-تمثيل بياني-......)إلى شكل آخر من أشكاله.

2) نقل العبارات الرياضية بشكلٍ مترابط وواضح للآخرين
-يوضح التعميمات الرياضية المستخدمة .
-يذكر أسماء كلٍ من المصطلحات الرياضية المستخدمة .
-يفسر العلاقات الرياضية التي يتضمنها النص الرياضي .
-يلخص ما فهمه للآخرين عن الأفكار والإجراءات والحلول.

3) تحليل وتقويم الحلول والمناقشات الرياضية المقدمة من قبلِ الآخرين
-يعطي أفكار صحيحة على علاقات أو مفاهيم رياضية .
-يعلل اختياره إجابةً(إجابات)لموقفٍ رياضي .
-يعلل اختياره تعميمات رياضية تناسب موقف أو فكرة رياضية.

4) استخدام اللغة الرياضية للوصف والتعبير عن الأفكار الرياضية بوضوح
-يستخدم لغته الخاصة لتقريب المفاهيم الرياضية .
-يستخدم الأدوات التكنولوجية(الآلة الحاسبة-الكمبيوتر...)في تنمية اللغة الرياضية والأشكال الرسومية والرموز الرياضية وتوصيل الأفكار الرياضية للآخرين .
-يصف العلاقات والأفكار الرياضية المتضمنة في المشكلات اللفظية للآخرين .
-يقرأ النصوص الرياضية المكتوبة بفهم .

أنماط التواصل الرياضي:

يساعد التدريس التلاميذ على تبادل وإيصال الأفكار الرياضية وذلك من خلال القراءة والكتابة والمناقشة والاستماع والتمثيل

التر ابط الرياضي :

أنواع الترابطات الرياضيات تنقسم الى قسمين-:

أولا:- ترابط داخلي (داخل الرياضيات)وينقسم إلي نوعين-:

١- ترابط بين الأفكار الرياضية للدروس مع بعضها البعض -:
مثال تعليم الجمع ثم الطرح ثم الضرب ثم القسمة فلا يفهم الطالب الدرس الثاني إلا بفهم الأول فلا يفهم القسمة إلا بعد معرفته لعملية الجمع والطرح والضرب

٢- ترابط بين موضوعات الرياضيات بشكل عام :- مثال لا يتم نقل الطالب من مرحلة إلى مرحلة إلا بعد تعلم مهارات الرياضيات للمرحلة الأولى لان الرياضيات تشكل سلسلة من الموضوعات المترابطة ترابطا وثيقا مثال لا يفهم الطالب المعادلات إلا بعد فهمه للعمليات الحسابية بدقة ولا النظريات إلا بعد فهمه للمسلمات ولا يفهم المركب إلا بعد فهمه للبسيط ولا يفهم الجديد إلا بعد فهمه للقديم

ثانيا:- ترابط خارجي (خارج الرياضيات) وينقسم نوعين

١- ترابط بين الرياضيات والمواد الأخرى:- مثل الترابط الوثيق للرياضيات بالفيزياء وكذلك بالكيمياء وكذلك بالاجتماعيات وجميع المواد إلا انه يختلف مقدار أو نسبة الترابط للرياضيات بالمواد الأخرى فالكل مادة نسبه ترابط بالرياضيات تختلف عن الأخرى

٢- ترابط بين الرياضيات والبيئة :- مثل استخدام نظرية فيثاغورس في البناء عندما نريد أن ننشئ زاوية قائمة أو المسائل اللفظية الكلامية التي تعبر عن موقف ما ويتم حله باستخدام الرياضيات

علاقة الرياضيات بالعلوم الأخرى :

ان الرياضيات من العلوم الهامة والتي لا يستغني عنها أي فرد مهما كانت ثقافته

الحساب : له اثر واضح في تجارة المسلمين اليومية وأحكامهم الشرعية ومن ذلك عدم الزيادة والنقصان في كثير من المعاملات لا يعرف ذلك إلا بالحساب ومن ذلك معرفة الربا.

الجبر : معرفة المواريث ،والابراج و اوقات دخول الصلوات والفلك بشكل عام

علم المثلثات : قياس المساحات الكبيرة والمسافات الطويلة بطريقة غير مباشرة كقياس ارتفاع جبل أو البعد بين جبلين أو عرض نهر او طول سنة شمسية

الهندسة : علم مهم يدرس الحجم والمساحة

فعلماء النفس المعاصرون : يستعينون بالرياضيات لبناء نماذج لدراسة عمليات التعلم

الاقتصاديون : يعتمدون عليها في فهم العلاقة بين الاستهلاك في الاقتصاد الراهن القائم على المنافسة

وشركات الأعمال : تطبق التفكير الرياضي الدقيق على مسائل الإدارة والتخزين والإنتاج

المهندسون : يعتمدون على الرياضيات **في وضع النماذج و التصاميم الهندسية ومحاكاة الواقع.**

و بعثت الرياضيات التطورات في علوم الحاسب الآلي والطب والإحياء والاقتصاد والمواصلات والاتصال وحماية البيئة وغزو الفضاء نشاطا عارما في الرياضيات **التي يمكن أن نعتبرها أم العلوم الأساسية ولغة التقنية الحديثة.**

التقنيات الحديثة في تعليم الرياضيات:

بعض الأساليب التي توضح كيفية توظيف التقنيات الحديثة في تعلم الرياضيات:

- **الاستفادة من البرمجيات في تعلم بعض عناصر المحتوى الرياضي مثل تطبيق (Autograph Version 3) وغيره ، حيث يمكن رسم الاسطح والاشكال ثلاثية الابعاد التي تصعب عملها على السبورة ،**
- **استخدام برمجيات تساعد على كتابة الرموز الرياضية وتحضير الدروس الكترونيا"**
- **الاستفادة من منتديات الرياضيات المتعددة الاجنبية والعربية**
- **استخدام ملحقات الحاسوب : مثل الماسح الضوئي ، الكاميرا الرقمية لالتقاط الصور وعرضها في Power point وبرنامج word .**
- **استخدام الالة الحاسبة بكفاءة**

التمثيل الرياضي :

اعادة تقديم او ترجمة الفكرة الرياضية او المشكلة بشكل جديد للمساعدة على فهمها

تصنيف التمثيلات الرياضية :

تتعدد التمثيلات الرياضية للفكرة الرياضية الواحدة بحسب الموقف الرياضي او طبيعة المفهوم ، حيث ان الفهم هو ادراك الفكرة في تمثيلات مختلفة والمرونة في معالجتها ،

مثل : الطالب الذي يفهم الدالـــة يدرك العلاقة بين مدخلاتها ومخرجاتها سواء في رسم تلك الدالة أو في جدول يمثلها أو في معادلتها .

تنقسم التمثيلات الرياضية الى قسمين :

- **تمثيلات خارجية : جميع الاشكال الرياضية للفكرة الواحدة ، مثل : تمثيلات مكتوبة ، تمثيل شفوي ، تمثيل بالرموز ، تمثيل بالصور والرسومات ، تمثيل محسوس ، تمثيل بالجداول ، تمثيل باستخدام الحاسوب**
- **تمثيلات داخلية : ما يبنيه الطالب من صور ذهنية للمطلوب**

انماط التمثيلات وفق اغراضها التعليمية :

الأشكال	التعريف	الأغراض التعليمية	أمثلة
الخريطة المعرفية Knowledge Map	أحد التمثيلات التي تربط المفاهيم داخل شكل بيضاوي أو مستطيل بينها خطوط توضح/أو لا توضح شكل الارتباط.	• تكشف العلاقات بين الموضوعات. • تربط الأفكار المعقدة. • تولد الأفكار الجديدة. • تدعم فهم الأفكار. • تقييم الفهم.	• خريطة المفاهيم. • الخريطة العنقودية. • الخريطة العقلية. • الملاحظات النمطية. • الخريطة العنكبوتية. • الشبكة السيمانتية.
الرسم التخطيطي Diagram	أحد التمثيلات التي تفيد في المقارنة بين موضوعين من خلال الدوائر بحيث يحد التداخل بينها .	• استدعاء المعلومات المترابطة. • المقارنة وتوضيح أوجه الاتفاق والاختلاف. • تبسيط العلاقات. • ملاحظة الفرعيات المتضمنة بالمفاهيم.	• الرسم التخطيطي للمفهوم. • الرسم التخطيطي الدائري للمفهوم. • الرسم التخطيطي الاستاتيكي. • الرسم أو التمثيل الشجري. • الرسم الأيقوني. • الرسم البيولوجي.

الأشكال	التعريف	الأغراض التعليمية	أمثلة
الصورة Picture	هو أحد أشكال التمثيل لكنه يقدم صوراً أو رسوماً	• انتقاء المعلومات المستهدفة. • عرض المعلومات المعروفة. • عرض المعلومات غير المعتادة من خلال عرض ما يشابهها. • التعاون مع أشكال الرسوم والأشكال التخطيطية الأخرى.	• الصور التمثيلية. • الصورة التنظيمية. • الصورة التفسيرية. • الصورة التحويلية.
الأشكال البيانية Graf	هو أحد أشكال التمثيل يتكون من محورين على الأقل، ولكل رقم مدلول افقي ورأسي.	• تمثل كم كبير من المعلومات. • ترميز المعلومات. • عقد المقارنات.	• الأشكال البيانية الخطية. • الأشكال الدائرية.
المخططات Charts	هي أحد الأشكال التي تحدد الروابط بين المتغيرات بشكل قاطع.	• تركز على المعلومات الهامة. • ترتب المعلومات وفق الأهمية. • توضح التكرارات. • تحدد تصنيفات المعرفة.	• المخطط الشبكي.
المصفوفة Matrix	شكل تخطيطي يوضح الإجراءات والخطوات.	• يعرض الإجراءات. • يربط المعلومات ذات الصلة ببعضها. • يساعد على استدعاء المعلومات.	• مصفوفة. • أطر وخانات. • الملمح السيمانتي. • الإطار المفهومي.
المخطط الانسيابي Flow	شكل تخطيطي يضم أسماء، خطوات، أشكال تخطيطية أخرى ...	• يوضح البنية الكلية للمعلومات. • تجميع المعلومات. • تقديم المعلومات بشكل بصري. • يقدم بنية المعلومات.	• المنظم التصويري. • المنظمات القصصية. • المنظمات التي تدور حول موضوع. • منظمات المشكلة/الحل.
التنظيم الشجري Tree	أحد الأشكال التخطيطية التي توضح العلاقات الهرمية بين الموضوعات.	• توضح العلاقات الثانوية. • تنظيم المعلومات هرمياً. • تصنف الأفكار. • تعرض التقسيمات.	• الشجرة التصنيفية.

اسئلة المعيار : ٩---١٣

١) تصنف كل من الزاوية ، المثلث ، التوازي على انها :

نظريات	مفاهيم	مهارات	تعميمات

٢) عدد ارجل الخراف والطيور معا هي 64 فكم خروف وكم طائر؟ طريقة الحل هي :

التخمين والتحقق	الرسم	الاستنتاج الرياضي	النمط

٣) قام معلم بإعطاء طلابه عدد من المثلثات وطلب منهم قياس زواياها ، ثم جمع القياسات وبعد ذلك اخبرهم ان مجموع زوايا المثلث 180، ماطريقة التدريس التي اتبعها المعلم ؟

تركيبية	استنباطية	استقرائية	تحليلية

٤) أي من الاتي لا يعد من عناصر المعرفة الرياضية :

المفاهيم	التعاميم	العمليات	المهارات

٥) المعرفة الرياضية التي تعرف انها "علاقة ثابته بين مفهومين رياضيين او اكثر:

تعميم رياضي	مهارة رياضية	مشكلة رياضية	مصطلح رياضي

٦) يحرص المعلم على تقديم اسئلة عديدة على القاعدة الرياضية قبل صياغتها وذلك بالتعاون مع تلاميذه لان ذلك ينمي لديهم :

التمثيل	الاستقراء	البرهان	الاستنتاج

٧) من مضوع الاحصاء والاحتمالات ،أي التدريبات الآتية اقل تنمية لمهارات التواصل الرياضي لدى الطالب

صف موقف في حياتك يتضمن حوادث مستقلة وغير مستقلة	اشرح لماذا يستعمل الطرح عند حساب احتمال حادثتين غير متناميتين	بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب من بين عشرة كتب موجودة على الرف	تحدث عن أوجه الشبه و الاختلاف بين الانحراف المعياري و الانحراف المتوسط

٨) عندما نريد استخدام الاستقراء الرياضي في اثبات صحة العبارة :

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ فأننا نقوم بما يلي:

- نعطي عدة امثله تؤكد صحة العبارة
- نبدأ من الطرف الايسر ونستخدم قوانين لأثبات مساواته بالأيمن
- نفرض صحة العبارة عندما ***n=1*** و ***n=k*** ونثبت صحتها عندما ***n=1+k***
- نثبت صحة العبارة عندما ***n=1*** وان صحتها عندما ***n=k*** يؤدي لصحتها عندما ***n=1+k***

٩) لخطوة الاولى لحل المسألة :

الحل	الفهم	التحقق	التخطيط

١٠) تفسير البيانات الاحصائية يعد رياضيا" :

مفهوم	**علاقة**	**تعميم**	**مهارة**

١١) قدرة الطالب على شرح مفهوم بأسلوبه الخاص يعتبر من اساليب :

استنتاج رياضي	**ترابط رياضي**	**تمثيل رياضي**	**تواصل رياضي**

١٢) أي من ازواج المفاهيم الاتية غير مرتبط ؟

الابدال والتجميع	**الجمع والضرب**	**النهايات والاشتقاق**	**الدالة الاسية واللوغاريتمية**

١٣) طرح هذا التساؤل في حل المسألة الرياضية: هل رأيت المشكلة من قبل بشكل مختلف ولو كان اختلاف قليل ؟ يناسب خطوة

تنفيذ الحل	**فهم المشكلة**	**التخطيط لفهم المشكلة**	**المراجعة والتحقق**

١٤) ما لاستراتيجية الانسب لحل المشكلة التالية : اذا كان كل صندوق صغير يحتوي *4* كرات وكل صندوق متوسط يحتوي *6* صناديق صغيرة وكان لدى المحل *50* صندوق متوسط الحجم . فما عدد الكرات الموجودة :

الحل العكسي	**التبرير المنطقي**	**حل مسألة اسهل**	**تخمين وتحقق**

١٥) تمثل الجمل التالية اربعة تمارين مستقاة من تمارين كثيرات الحدود في الصف الثاني ثانوي، حدد أكثر هذه التمارين ارتباط بالترابط الرياضي :

برهن ان :$\frac{1}{a^a}=a^{-a}$	**فسر لماذا تكون العبارة 0^{-2} غير معرفة**	**لماذا خصائص الاسس مهمة في دراسة الفلك**	**مثل بيانيا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها *8***

١٦) طلب معلم الرياضيات من تلاميذه تزيين اطراف الجدران بشرط لاصق وحساب عدد الامتار اللازمة لذلك ،هذا يعد مشروع تطبيقي على درس

التعامد	**المحيط**	**التناظر**	**المساحة**

١٧) مفهوم التطبيق هو نفسه مفهوم :

الدالة	**العلاقة**	**التحويل الخطي**	**التشاكل**

١٨) اشارت مناهج الرياضيات المتطورة في موضوع (الدالة الاسية) الى ان انقسام الخلايا وتكاثرها يأخذ شكل دوال اسية وهذه الإشارة تنمي لدى الطالب :

استدلال رياضي	**تواصل رياضي**	**تمثيل رياضي**	**ترابط رياضي**

١٩) ايهما صحيحة :

كل علاقة تطبيق وكل تطبيق علاقة	**كل تطبيق تقابل وكل علاقة تطبيق**	**كل تقابل تطبيق٠ وكل تطبيق علاقة**	**كل علاقة تقابل وكل تطبيق تقابل**

٢٠) **حدد الاستراتيجية المناسبة لحل المشكلة التالية :**
تحصل طالبة على درجتين (للإجابة الصحيحة)وتفقد درجة للإجابة الخاطئة فإذا حصلت على 12 درجة من 18 إجابة . فما عدد الإجابات الصحيحة ؟

انشاء قائمة	حل عكسي	بحث عن نمط	حل مسألة اسهل

٢١) **يستخدم الوسيط لوصف البيانات عندما :**

لوصف انتشار البيانات	تحتوي البيانات قيم متطرفة	تحتوي البيانات قيم متساوية	لا تحتوي البيانات قيم متطرفة

٢٢) **اذا كان عدد الساعات التدريبية لخالد خلال خمسة أيام هي :**
1,2,3,4 فإذا تدرب في اليوم الأول ساعتين بدل من ساعة فأي القيم تقل :

المدى	المنوال	الوسيط	المتوسط الحسابي

٢٣) **سأل معلم طلابه عن عدد ركعات الصلاة هذا ينمي مهارة**

الترابط الرياضي	التحليل	البرهان الرياضي	التواصل الرياضي

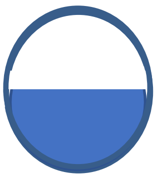
٢٤) **معلم طلب من طلابه كتابة قصة تحوي جمع وطرح العدد 24 ينمي لديهم:**

التواصل	الترابط	التمثيل	التحليل

٢٥) **معلم حل مثال مع طلابه ثم اعاد صياغته بتغيير الارقام يريد قياس ؟**

الفهم	التذكر	التطبيق	

٢٦) **معلم شرح للطلاب بهذا الشكل ماهي العلاقة المستعملة ؟**



$$= 0.5 \quad = \quad 0.50 \quad = \frac{1}{2}$$

تواصل	ترابط	استنتاج	تمثيل

٢٧) **تستخدم العيدان الملونة في :**

منازل الاعداد	الكسور	التفكير المنطقي	الاطوال

الحلـــول :

١- مفاهيم
٢- تخمين وتحقق
٣- استقرائية
٤- العمليات
٥- تعميم رياضي
٦- الاستقراء
٧- بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب من بين عشرة كتب موجودة على الرف

٨- نثبت صحة العبارة عندما $n=1$
وان صحتها عندما $n=k$ يؤدي لصحتها عندما $n=1+k$

٩- الفهم
١٠- مهارة
١١- الاستنتاج الرياضي
١٢- الابدال و التجميع (لان جميع المفاهيم الاخرى مترابطة)
١٣- التخطيط
١٤- الحل العكسي
١٥- مثل بيانيا كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد جذورها 8
١٦- المحيط
١٧- الدالة
١٨- الترابط الرياضي
١٩- كل تقابل تطبيق وكل تطبيق علاقة
٢٠- الحل العكسي
٢١- تحوي قيم متطرفة
٢٢- المدى لأنه اكبر قيمة ناقص اصغر قيمة . وعندما تكبر القيمة الأولى يكون ناتج الطرح اقل
٢٣- الترابط الرياضي
٢٤- التواصل
٢٥- التطبيق
٢٦- تمثيل (مثل الشكل بأكثر من طريقة)

_ تمت _

أرجو لكم/ن النجاح و التوفيق