كتاب

الشامل في التدريب على القدرات والإختبارات التحصيلية

إعداد المعلم/سمير محمد وهدان" ثانوية الوجه"
مراجعة الأستاذ/عودة محمد رفادة
تحت إشراف الأستاذ/علي بن جميل أبو صابر.

منتديات يزيد التعليمية
www.yzeeed.com/vb
قسم القدرات العامة والاختبار التحصيلي

الجزء الثالث

بسم اللّه الرحمن الرحيم

* مُقَدمة *

الحمد لله الذي لا تُعد نعمه و لا تُحصى

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

يُسعدني أن أُقدم لكم الجزء الثالث من كتاب الشامل في الرياضيات والذي آمل أن يكون المساعد للطالب بعد الله عز وجل للتفوق في اختبار القدرات والاختبارات التحصيلية

والجزء الثالث يتكون من قسمين فقط:

١) حساب المثلثات من صـ ٥ : صـ ١١

٢) التفاضل والتكامل من صـ ١٢ : صـ ٢٧

٣) مفاتيح الحلول الصحيحة صـ ٢٨

*** هذا والله أسأل أن يجعل هذا العمل خالصاً لوجهه الكريم ***

سمير محمد وهدان

رياضيات

الشامل
في
التدريب على القدرات
والاختبارات التحصيلية

[٣]

رياضيات

جمع و إعداد المعلم
سمير محمد وهدان
ثانوية الوجه

مراجعة الأستاذ:
عودة محمد رفادة

إشراف الأستاذ:
علي جميل أبو صابر

مدير المدرسة الأستاذ:
معاذ عبد الله أمين العلي

[١] في حساب المثلثات

١) الزاوية الموجهة هي زوج مرتب مسقطه الأول الضلع الابتدائي والمسقط الثاني هو الضلع النهائي

٢) تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا كان :

١) رأسها نقطة الأصل ، ٢) ضلعها الابتدائي منطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات

٣) دائرة الوحدة : أي نقطة (س ، ص) تنتمي لدائرة الوحدة تحقق العلاقة: $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

٤) تكون الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي متكافئة إذا كان لها نفس الضلع النهائي

وإذا كان قياس زاوية في وضع قياسي = هـ فإن الزوايا المكافئة لها في القياس تكون

قياساتها = هـ + م × ٣٦٠° حيث م عدد صحيح

٥) لكل زاوية موجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب وذلك حسب الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي (مع عقربي الساعة سالب ،عكسهما موجب)

٦) إذا كان القياس الموجب للزاوية = هـ فإن القياس السالب لها = هـ − ٣٦٠

وإذا كان القياس السالب للزاوية = − هـ فإن القياس الموجب = ٣٦٠ − هـ

٧) للتحويل من القياس الستيني للقياس الدائري : نضرب القياس الستيني × ط ونقسم على ١٨٠

٨) وللتحويل من القياس الدائري للقياس الستيني : نضرب القياس الدائري في ١٨٠ ونقسم على ط

٩) إذا قطع الضلع النهائي للزاوية الموجهة التي قياسها = هـ دائرة الوحدة في النقطة (س ، ص)

فإن : جتا هـ = س ، جا هـ = ص ويلاحظ أن :

$ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ}$ ، ظتا هـ × ظا هـ = ١ ،، قا هـ × جتا هـ = ١ ، قتا هـ × جا هـ = ١

١٠) التعبير عن قياس زاوية في المستوى:

الربع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
القياس	٠<س<٩٠	٩٠<س<١٨٠	١٨٠<س<٢٧٠	٢٧٠<س<٣٦٠
التعبير	هـ	١٨٠− هـ	١٨٠+ هـ	٣٦٠− هـ
الإشارة	الكل(+)	جا (+)	ظا (+)	جتا (+)

١١) تبسيط قيم الدوال المثلثية:

(أ) جتا (– س) = جتا س ،، جا (– س) = – جا س ،، ظا (– س) = – ظا س

(ب) جتا ($\frac{\pi}{2}$ – س) = جا س ،، جا ($\frac{\pi}{2}$ – س) = جتا س ،، ظا ($\frac{\pi}{2}$ – س) = ظتا س

(ج) جتا ($\frac{\pi}{2}$ + س) = – جا س ،، جا ($\frac{\pi}{2}$ + س)= جتا س ،، ظا ($\frac{\pi}{2}$ + س) = – ظتا س

١٢) العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين :

جا (٩٠° – هـ)= جتا هـ ⇦ جا ٣٠° = جتا ٦٠°

جتا (٩٠° – هـ)= جا هـ ⇦ جتا ٢٠° = جا ٧٠°

ظا (٩٠° – هـ) =ظتا هـ ⇦ ظا ١٠° = ظتا ٨٠°

ظتا (٩٠° – هـ)= ظا هـ ⇦ ظتا ٧٥° = ظا ١٥°

١٣) المتطابقات الأساسية :

جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١ ، ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، ١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س ، ١ + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

١٤) العلاقة بين الدوال المثلثية و المثلث القائم الزاوية :

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

، ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

١٥) حساب الارتفاعات و الأبعاد : مسائل الارتفاعات والأبعاد تعتمد على رسم مثلث قائم الزاوية و كتابة كافة البيانات على الرسم و من ثم استنتاج الحل من خلال معرفتك للعلاقة بين الدوال المثلثية و المثلث القائم الزاوية .

١٦) النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:

بالدرجات	٠	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠°
بالراديان	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
جا	٠	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	٠	– ١	٠
جتا	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	٠	– ١	٠	١
ظا	٠	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	∞	٠	∞	٠

١٧) الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما:

(أ) جا (س ± ص) = جاس جتاص ± جتاس جاص

(ب) جتا (س ±ص) = جتاس جتاص ∓ جاس جاص

(جـ) ظا (س + ص) = $\frac{\text{ظاس + ظاص}}{\text{١ - ظاس ظاص}}$ ،، ظا (س – ص) = $\frac{\text{ظاس - ظاص}}{\text{١ + ظاس ظاص}}$

١٨) الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا :

(أ) جا ٢س = ٢جاس جتاس

(ب) جتا ٢س = جتا^{٢}س – جا^{٢}س = ٢جتا^{٢}س – ١ = ١ – ٢جا^{٢}س

(جـ) ظا ٢س = $\frac{\text{٢ ظا س}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{س}}$

١٩) الدوال الدائرية لنصف الزاوية:

(أ) جا$^{٢}\frac{س}{٢}$ = $\frac{\text{١ - جتاس}}{٢}$ ،، (ب) جتا$^{٢}\frac{س}{٢}$ = $\frac{\text{١ + جتاس}}{٢}$ ،، (جـ) ظا$^{٢}\frac{س}{٢}$ = $\frac{\text{١ - جتاس}}{\text{١ + جتاس}}$

٢٠) قوانين التحويل : (١) من الجمع أو الطرح إلى الضرب :

جاس + جاص = ٢جا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$ ،،

جاس – جاص = ٢جا $\frac{س-ص}{٢}$ جتا $\frac{س+ص}{٢}$

جتاس + جتاص = ٢جتا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$ ،،

جتاس – جتاص = –٢جا $\frac{س+ص}{٢}$ جا $\frac{س-ص}{٢}$

(٢) من الضرب إلى جمع أو طرح :

جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ [جا (س+ص) + جا (س–ص)] ،

جتاس جاص = $\frac{١}{٢}$ [جا (س+ص) – جا (س–ص)] ،

جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ [جتا(س+ص) + جتا(س–ص)] ،

جاس جاص = – $\frac{١}{٢}$ [جتا(س+ص) – جتا(س–ص)]

٢١) العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه :

في أي مثلث ا ب جـ حيث أطوال أضلاعه هي : أ ، ب ، جـ :

(١) قاعدة الجيوب : $\frac{أ}{\text{جا ا}}$ = $\frac{ب}{\text{جا ب}}$ = $\frac{جـ}{\text{جا جـ}}$

(٢) قاعدة جيوب التمام :

أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} – ٢ ب جـ جتا ا ،

ب^{٢} = ا^{٢} + جـ^{٢} – ٢ ا جـ جتا ب ،

بالمثل : جـ^{٢} = ا^{٢} + ب^{٢} – ٢ ا ب جتا جـ

تدريبات

١	النقطة (٠ ، − ١) ..... دائرة الوحدة			
	(أ) ∉	(ب) ∋	(ج) لا تقع على	(د) غير ذلك
٢	إذا كان (س ، $\frac{١}{٢}$) ∋ دائرة الوحدة فإن س = ...			
	(أ) $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$	(ب) $-\sqrt{\frac{٣}{٤}}$	(ج) $\pm\sqrt{\frac{٣}{٤}}$	(د) $\frac{١}{٢}$
٣	الزاوية التي قياسها ٧٥٠° تكافئ الزاوية التي قياسها			
	(أ) صفر°	(ب) ٣٠°	(ج) ٤٥°	(د) ٦٠°
٤	الزاوية التي قياسها = − ١٢٠° قياسها الموجب = ...			
	(أ) ٢٤٠°	(ب) ١٥٠°	(ج) ١٢٠°	(د) ٩٠°
٥	الزاوية التي قياسها ٣٠٠° قياسها السالب=			
	(أ) − ٤٥°	(ب) − ٦٠°	(ج) − ٩٠°	(د) − ١٢٠°
٦	الزاوية ٣٠° قياسها الدائري = ...			
	(أ) $\frac{ط}{2}$	(ب) $\frac{ط3}{2}$	(ج) $\frac{ط}{6}$	(د) $\frac{ط2}{3}$
٧	القياس الستيني للزاوية : $\frac{ط2}{3}$ هو			
	(أ) ٩٠°	(ب) ١٢٠°	(ج) ١٥٠°	(د) ٢١٠°
٨	جا ١٢٠° = ...			
	(أ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ج) $\frac{١}{٢}$	(د) $-\frac{١}{٢}$
٩	جتا ٢٤٠° = ...			
	(أ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ج) $\frac{١}{٢}$	(د) $-\frac{١}{٢}$

١٠	جتا (− ١٥٠°) = ...			
	(أ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ج) $\frac{1}{2}$	(د) $-\frac{1}{2}$
١١	قتا (− ٣٠°) = ...			
	(أ) صفر	(ب) $-\frac{1}{2}$	(ج) − ١	(د) − ٢
١٢	ظا (− ١٣٥°) = ...			
	(أ) − ١	(ب) $-\frac{1}{2}$	(ج) صفر	(د) ١
١٣	جا (− ٢٤٠°) = ...			
	(أ) $-\frac{1}{2}$	(ب) صفر	(ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(د) ١
١٤	جتا ٢١٠° = ...			
	(أ) − ١	(ب) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	(ج) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$	(د) $\frac{1}{2}$
١٥	قا (− ١٥٠°) = ...			
	(أ) − ١	(ب) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$	(ج) صفر	(د) $\frac{1}{2}$
١٦	جا ٦٣° = ...			
	(أ) جتا ٦٣°	(ب) جا ٢٧°	(ج) جتا ٢٧°	(د) قا ٦٣°
١٧	جتا ١٢٠° = ...			
	(أ) − جا ٣٠°	(ب) − جا ٦٠°	(ج) جا ٦٠°	(د) جتا ٦٠°
١٨	جتا ($\frac{3ط}{2}$ + ع) = ...			
	(أ) جتا ع	(ب) جا ع	(ج) − جتا ع	(د) − جا ع

١٩	منحنى كلاً من الدالتين جا س ، جتا س محصور بين المستقيمين:.....			
	(أ) س = ١،س=−١	(ب) ص=١،س=−١	(ج) س=١،ص=−١	(د) ص=−١،ص=١
٢٠	إذا كانت هـ ∈ (٩٠ ، ١٨٠) وكان : جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإن جتا هـ = ...			
	(أ) − ١	(ب) − $\frac{٤}{٥}$	(ج) $\frac{١}{٢}$	(د) $\frac{٤}{٥}$
٢١	جا ١٥° جتا ١٥° = ...			
	(أ) − $\frac{١}{٢}$	(ب) صفر	(ج) $\frac{١}{٤}$	(د) ١
٢٢	جتا ٧٥° جا ٧٥° = ...			
	(أ) − $\frac{١}{٢}$	(ب) صفر	(ج) $\frac{١}{٤}$	(د) ١
٢٣	جتا^{٢} ٢٢.٥° + جا^{٢} ٢٢.٥° = ...			
	(أ) صفر	(ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(ج) − ١	(د) ١
٢٤	جتا^{٢} ٢٢.٥° − جا^{٢} ٢٢.٥° = ...			
	(أ) صفر	(ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(ج) − ١	(د) ١
٢٥	(جتا ٢٢.٥° + جا ٢٢.٥°)^{٢} = ...			
	(أ) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	(ب) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	(ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(د) ١
٢٦	(جتا ٢٢.٥° − جا ٢٢.٥°)^{٢} = ...			
	(أ) $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	(ب) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$	(ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(د) ١
٢٧	جا ١٥° = ...			
	(أ) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ب) $\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ج) $\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(د) صفر

٢٨	جتا ١٠٥° = ...			
	(أ) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ب) $\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ج) $\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(د) صفر
٢٩	جا ٢٨٥° = ...			
	(أ) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ب) $\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(ج) $\frac{-1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$	(د) صفر
٣٠	جا ٢٣° جتا ٢٢° + جتا ٢٣° جا ٢٢° = ...			
	(أ) صفر	(ب) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(ج) $\frac{1}{2}$	(د) ١
٣١	جا ٦٧° جا ١٧° + جتا ٦٧° جتا ١٧° = ...			
٣٢	جا ١٠٥° جا ١٥° − جتا ١٠٥° جتا ١٥° = ...			
	(أ) $-\frac{1}{2}$	(ب) $\frac{1}{2}$	(ج) − ١	(د) ١
٣٣	جا ٩ جـ − جا ٣ جـ = ...			
	(أ) ٢جتا٦جـ.جا٣ جـ	(ب) ٢جا٦جـ.جتا٣ جـ	(ج) ٢جتا٣جـ.جا٦ جـ	(د) جا٦ جـ.جا٣ جـ
٣٤	في المثلث أ ب جـ : {أ ب} = ٣سم ، {ب جـ} = ٥سم، $\hat{جـ}$ = ٣٠° فإن جا أ = ...			
	(أ) صفر	(ب) $\frac{1}{2}$	(ج) $\frac{5}{6}$	(د) ١
٣٥	في المثلث السابق : إذا كانت $\hat{ب}$ = ٤٥° فإن {أ جـ} = ...			
	(أ) $٣\sqrt{٢}$	(ب) ٤	(ج) ٦	(د) $٦\sqrt{٢}$

[٢] التفاضل و التكامل

١) لإيجاد النهاية لدالة ما عند نقطة لا يتغير حولها تعريف الدالة : نوجد النهاية بالتعويض المباشر

٢) بعض خواص النهايات : ① $\lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} = \pm\infty$ ② $\lim_{س \to ٢} م = م$ حيث م ثابت

③ $\lim_{س \to ٢} س^{ن} = ٢^{ن}$: ن ∈ ط ④ $\sqrt{\lim_{س \to ٢} د(س)} = \lim_{س \to ٢} \sqrt{د(س)}$

٣) إذا كانت : $\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ل_١$ ($ل_١$ تسمى النهاية اليسرى للدالة د)

،، $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ل_٢$ ($ل_٢$ تسمى النهاية اليمنى للدالة د)

فإن : $\lim_{س \to ٢} د(س)$ يكون لها وجود إذا كانت $ل_١ = ل_٢$

٤) عند إيجاد النهاية لدالة وكان ناتج التعويض المباشر إحدى القيم ($\frac{صفر}{صفر}$ أ، $\frac{\infty}{\infty}$ أ، $\infty - \infty$)

والتي تسمى حالات عدم التعيين في هذه الحالة نلجأ إلى :

① إذا كان $\lim_{س \to ٢} د(س) = \frac{صفر}{صفر}$:

التحليل أو الضرب×المرافق واختصار العامل (س−٢)من البسط والمقام

② إذا كان $\lim_{س \to \infty} د(س) = \frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$:

قسمة البسط والمقام على س بأكبر أس في المقام أو الضرب×المرافق

٥) عندما س ← ±∞ فانه توجد ثلاث حالات :

أ) نهاية خارج قسمة كثيرتي حدود (درجة البسط = درجة المقام) = قسمة المعاملين الرأسيين

ب) نهاية خارج قسمة كثيرتي حدود (درجة البسط < درجة المقام) = ∞

ج) نهاية خارج قسمة كثيرتي حدود (درجة البسط > درجة المقام) = صفر

٦) نظريات في النهايات:

① إذا كانت كل من الدالتين $د_١$، $د_٢$ معرفة على الفترة ف التي حذف منها العدد ٢

وكانت $د_١$ محدودة على ف− {٢} ، و $\lim_{س \to ٢} د_٢(س) =$ صفر

فان : $\lim_{س \to ٢} د_١(س)\ د_٢(س) =$ صفر

② اذاكانت كل من الدوال $د_١$، $د_٢$ ،$د_٣$ معرفة على الفترة ف التي حذف منها العدد ٢ وكانت

$د_١(س) \leq د_٢(س) \leq د_٣(س)$ ∀ س ∈ ف − {٢}

وكانت $\lim_{س \to ٢} د_١(س) = \lim_{س \to ٢} د_٣(س) = ل$ ⇐ $\lim_{س \to ٢} د_٢(س) = ل$

③ إذا كانت س مقيسة بالتقدير الدائري فإن :

إعداد المعلم/سمير محمد وهدان" ثانوية الوجه" مراجعة الأستاذ/عودة محمد رفادة
تحت إشراف الأستاذ/على بن جميل أبو صابر. منتديات يزيد التعليمية

$\lim_{س\to 0} \frac{جاس}{س} = 1 = \lim_{س\to 0} \frac{ظاس}{س}$ ، $\lim_{س\to 0} \frac{1-جتاس}{س} = 0$

٦) الدالة د تكون متصلة عند النقطة هـ إذا تحققت الشروط التالية: ① د معرفة عند س = هـ

② $\lim_{س\to هـ}$ د(س) لها وجود ③ $\lim_{س\to هـ}$ د(س) = د(هـ)

٧) معدل تغير الدالة د(س) س١ إلى س١ + هـ يعطى بالعلاقة:

$م(س_1 ، س_1+هـ) = \frac{د(س_1+هـ)-د(س_1)}{هـ}$

٨) مشتقة الدالة ص = د(س) هي : $\frac{ص}{س}$ = صَ = دَ(س) = $\lim_{هـ\to 0} \frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ}$

٩) بعض قواعد الاشتقاق:

م	الدالة د(س) =	المشتقة دَ(س) =
١	ث ثابت	صفر
٢	أ س + ب	أ
٣	س ن	ن س ن-١
٤	[و(س)]ن	ن [و(س)] ن-١ × وَ(س) مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس
٥	و(س) × ر(س) ضـــرب دالتين	وَ(س) × ر(س) + وَ(س) × رَ(س) الأولى × مشتقة الثانية + مشتقة الأولى × الثانية
٦	$\frac{و(س)}{ر(س)}$ قسمة دالتين	$\frac{ر(س) \times وَ(س) - و(س) \times رَ(س)}{[ر(س)]^2}$ المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام مربع المقام
٧	$\sqrt{و(س)}$ جذر تربيعي فقط	$\frac{وَ(س)}{٢ \times \sqrt{و(س)}}$ $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$
٨	$\frac{أ}{و(س)}$ أ ثابت	$\frac{-أ \times وَ(س)}{[و(س)]^2}$ $\frac{-\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$
٩	جـــا س	جتا س

١٠	جتـــا س	– جا س
١١	ظـــا س	قا^{٢} س
١٢	قـــا س	قا س ظا س
١٣	قتـــا س	– قتا س ظتا س
١٤	ظتـــا س	– قتا^{٢} س
١٥	جـــا [د (س)]	دَ(س) جتا [د (س)]

ملاحظة مهمة : **التحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية :** $\sqrt[ن]{س^{م}} = (س)^{\frac{م}{ن}}$

١٠) إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق عند نقطة ما فإنها متصلة عند هذه النقطة

والعكس غير صحيح بمعنى أن اتصال الدالة عند نقطة ما لا يلزم أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق

فمثلاً : دالة القيمة المطلقة غير قابلة للاشتقاق عند أصفارها

أي أن : د(س)= {س} متصلة عند س= ٠ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س= ٠

١١) تطبيقات على المشتقات:

① ميل المماس م = $\frac{ء ص}{ء س}$ مشتقة الدالة ، ميل العمودي = $-\frac{١}{م}$

② معادلة المماس : (ص – ص$_{١}$) = م (س – س$_{١}$)

③ معادلة العمودي : (ص – ص$_{١}$) = $-\frac{١}{م}$ (س – س$_{١}$)

④ إذا كان المماس يوازي محور السينات فإن : ميل المماس م = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠

⑤ إذا كان المماس يوازي محور الصادات فإن : ميل المماس م = $\frac{ء ص}{ء س}$ غير معرف

⑥ إذا كان المماس يصنع زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

ميل المماس م = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ظا هـ

⑦ الإزاحة ف دالة في الزمن لـ

⑧ السرعة ع = $\frac{ء ف}{ء ن}$ مشتقة الإزاحة

⑨ التسارع ت = $\frac{ء ع}{ء ن}$ مشتقة السرعة

**ملاحظات :

يصل الجسيم إلى أقصى ارتفاع ⟺ ع = صفر ⟺ يسكن الجسيم لحظياً

،، بداية الحركة ⟺ لـ = ٠ ،، يعود الجسيم إلى نقطة البدء ⟺ف= ٠

١٢) شروط نظرية رول:

① الدالة د(س) متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب]

② د(س) قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة] أ ، ب [③ د(أ) = د(ب)

وإذا حققت الدالة د(س) شروط رول على الفترة [أ ، ب] فإنه يوجد على الأقل عدد واحد

جـ ∈] أ ، ب [يحقق : د َ (س) = صفر (المماس // محور السينات)

١٣) ملاحظات على نظرية رول:

① دالة كثيرة الحدود متصلة وقابلة للاشتقاق على ح

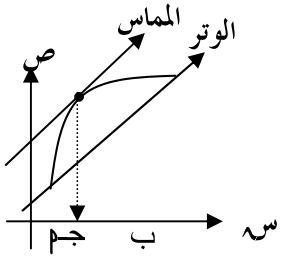
② في كثيرة الحدود من الدرجة الثانية المعرفة على الفترة [أ ، ب] إذا كان د (أ) = د (ب) فإن : قيمة جـ = $\frac{أ+ب}{٢}$ (الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ)

③ كثيرات الحدود من الدرجة الأولى لا تحقق نظرية رول لأن : د(أ) ≠ د (ب)

④ إذا كانت الدالة ثابتة على الفترة [أ، ب] فإن جـ تكون أي نقطة ∈]أ ، ب [

⑤ دالة القيمة المطلقة لا تحقق شروط رول على فترة تحتوي صفر ما بداخلها

١٤) **نظرية :** (القيمة المتوسطة) إذا كانت الدالة :



① متصلة في الفترة المغلقة [أ ، ب]

② قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (أ ، ب)

فإنه يوجد على الأقل جـ ∈ (أ ، ب) بحيث د َ (جـ) = $\frac{د(ب)-د(أ)}{ب-أ}$

١٥) ملاحظات على نظرية القيمة المتوسطة:

① كثيرات الحدود تحقق نظرية القيمة المتوسطة دائماً

② في كثيرة الحدود من الدرجة الثانية المعرفة على الفترة [أ ، ب] قيمة جـ = $\frac{أ+ب}{٢}$

③ إذا كانت الدالة ثابتة أو من الدرجة الأولى على الفترة [أ ، ب]

فإن جـ تكون أي نقطة ∈ (أ ، ب)

١٦) النقطة الحرجة: هي النقطة التي يكون عندها المماس يوازي محور السينات : د َ (س) = صفر

أو يوازي محور الصادات : د َ (س) غير معرفة

أو النقاط التي يكون عندها انكسار أو النقاط التي يتغير عندها تعريف الدالة : د َ (س) غير موجودة

١٧) ملاحظات: ① لا توجد نقاط حرجة للدالة الخطية

② إذا كانت جـ نقطة حرجة لدالة مجالها فترة مغلقة [أ ،ب] فإن جـ ∈ (أ ، ب)

١٨) نقول أن للدالة د(س) قيمة عظمى على الفترة ف إذا وجدت جـ ∈ ف
بحيث د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈ ف

١٩) نقول أن للدالة د(س) قيمة صغرى على الفترة ف إذا وجدت جـ ∈ ف
بحيث د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈ ف

٢٠) ملاحظات:
① القيم القصوى لكثيرة الحدود من الدرجة الأولى المعرفة على فترة مغلقة تكون عند طرفي الفترة
② قد تعجز الدالة عن تحقيق قيمة قصوى على ف مثل الدالة الثابتة والدالة د(س)= $\frac{١}{س}$
③ كل دالة متصلة على فترة مغلقة لا بد من وجود قيمة عظمى مطلقة وكذلك قيمة صغرى مطلقة على الأقل

٢١) إذا كانت الدالة د(س) متزايدة على [أ ، ب] فإن : د'(س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)
وتكون الدالة د(س) متناقصة على [أ ، ب] إذا كانت د'(س) < ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

س		جـ نقطة حرجة	
د'(س)	+ + +		− − −
	جتا		↘

د متزايدة على الفترة [جـ ، ∞) ، د متناقصة على الفترة (∞- ، جـ]
* ملاحظة : إذا كان للدالة د قيمة قصوى محلية عند جـ فإن جـ نقطة حرجة للدالة

٢٢) إذا كانت جـ نقطة حرجة
أ إذا كانت د' (س) > ٠ ⇐ د(جـ) قيمة صغرى محلية
ب إذا كانت د' (س) < ٠ ⇐ د(جـ) قيمة عظمى محلية

٢٣) تقعر الدالة : إذا كانت الدالة د القابلة للاشتقاق مرتين على الفترة (أ، ب) ، تكون
① مقعرة لأعلى على الفترة (أ، ب) إذا كانت د''(س) > ٠ لكل س ∈ (أ، ب)
② مقعرة لأسفل على الفترة (أ، ب) إذا كانت د''(س) < ٠ لكل س ∈ (أ، ب)

الدالة د مقعرة لأعلى على الفترة (أ ، ∞)
الدالة د مقعرة لأسفل على الفترة (-∞ ، أ)

س		أ	
د''(س)	+ + +		− − −
	∪		∩

النقطة (أ ، د (أ)) تسمى نقطة انقلاب " انعطاف" بشرط د''(أ) = صفر

٢٤) ملاحظات: ① عند نقطة الانقلاب تكون المشتقة الثانية إما تساوي صفراً أو غير معرفة

② نقطة الانقلاب الأفقية هي النقطة التي يكون عندها المماس أفقياً وتكون المشتقة الأولى والثانية عندها تساوي صفراً

٢٥) شرط الدالة الزوجية د(س)=د(−س) ،، شرط الفردية د(−س)=−د(س)

لإيجاد نقاط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ، مع محور الصادات نضع س = ٠

٢٦) الدالة الأصلية: إذا كانت ل(س) دالة أصلية للدالة د(س) فإن : ل َ (س) = د(س)

ويلاحظ أن : ∫ د(س) ء س = ل (س) + ث ⟺ ل َ(س) = د(س)

٢٧) بعض قواعد التكامل:

① ∫ أ ء س = أ س + ث

② ∫ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث = $\frac{١}{ن+١}$ س$^{ن+١}$ + ث بشرط ن ≠ −١

③ ∫ (أ س + ب)^{ن} ء س = $\frac{١}{أ}$ × $\frac{(أ س+ب)^{ن+١}}{ن+١}$ + ث

④ ∫ د َ(س) [د(س)]^{ن} ء س = $\frac{١}{ن+١}$ [د(س)]$^{ن+١}$ + ث بشرط ن ≠ −١

⑤ ∫ جاس ء س = − جتاس + ث

⑥ ∫ جتاس ء س = جاس + ث

⑦ ∫ قا^{٢}س ء س = ظاس + ث

⑧ ∫ قتا^{٢}س ء س = − ظتاس + ث

⑨ ∫ قاس ظاس ء س = قاس + ث

⑩ ∫ قتاس ظتاس ء س = − قتاس + ث

٢٨) التكامل المحدد : إذا كانت د(س) متصلة على الفترة [أ ، ب] وكانت ل (س) دالة أصلية للدالة د(س)

فإن : ∫$_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = [ل(س)]$_{أ}^{ب}$ = ل (ب) − ل (أ) = عدد حقيقي

٢٩) بعض خواص التكامل المحدد :

① ∫$_{أ}^{ب}$ ك د(س) ء س = ك ∫$_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

② ∫$_{أ}^{ب}$ [د$_{١}$(س) ± د$_{٢}$(س)] ء س = ∫$_{أ}^{ب}$ د$_{١}$(س) ء س ± ∫$_{أ}^{ب}$ د$_{٢}$(س) ء س

③ ∫$_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = ∫$_{أ}^{جـ}$ د(س) ء س + ∫$_{جـ}^{ب}$ د(س) ء س حيث جـ ∈ [أ ، ب]

④ ∫$_{أ}^{أ}$ د(س) ء س = صفر

⑤ ∫$_{ب}^{أ}$ د(س) ء س = − ∫$_{أ}^{ب}$ د(س) ء س ∀ ب ⩽ أ

⑥ إذا كانت د(س) ⩾ ٠ على [ا ، ب] فإن : $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ء س ⩾ ٠

⑦ إذا كان ا < ب فإن : $\left|\int_{ا}^{ب} \text{د(س)}\ \text{ء س}\right| \leqslant \int_{ا}^{ب} \left|\text{د(س)}\right|\ \text{ء س}$

⑧ إذا كان كلاً من د١ ، د٢ قابلة للتكامل على الفترة [ا ، ب] وكان د١ ⩽ د٢

فإن : $\int_{ا}^{ب}$ د١(س) ء س ⩽ $\int_{ا}^{ب}$ د٢(س) ء س

٣٠) نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت د(س) متصلة على الفترة [ا ، ب] ، فإنه يوجد س. ∈ [ا ، ب] بحيث :

$\int_{ا}^{ب}$ د(س) ء س = (ب − ا) د(س.)

ملاحظة : إذا كانت الدالة من الدرجة الأولى فإن قيمة س. التي تحققها نظرية القيمة المتوسطة للتكامل تكون في منتصف الفترة

٣١) نظرية :

إذا كانت د(س) متصلة على الفترة [ا ، ب] ، وكانت ى هي الدالة المعرفة كما يلي :

ى (س) = $\int_{ا}^{س}$ د(ع) ء ع ∀ س ∈ [ا ، ب]

فإن : د(س) = $\frac{ء}{ء س}$ ى (س)

٣٠) بعض تطبيقات التكامل:

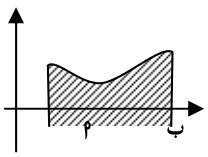
① ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) هو صَ = $\int$ صً ء س

② معادلة المنحنى هي : ص = $\int$ صَ ء س

③ دالة الإزاحة هي : ف(ن) = $\int$ ع(ن) ء ن ودالة السرعة ع(ن) = $\int$ ت(ن) ء ن

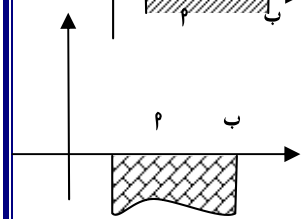
④ المساحات :

١) إذا كانت د(س) متصلة في [ا،ب] ، د(س) ⩾ ٠ ∀ س ∈ [ا،ب] كما بالشكل



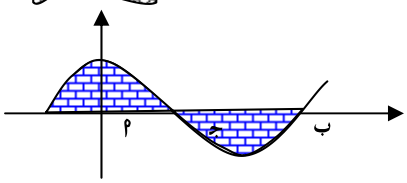
فإن ⇐ المساحة = $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ءس

٢) إذا كانت د(س) متصلة في [ا،ب] ، د(س) ⩽ ٠ ∀ س ∈ [ا،ب] كما بالشكل



فإن ⇐ المساحة = − $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ءس

٣) إذا كانت د(س) متصلة في [ا،ب] كما بالشكل المقابل



فإن ⇐ المساحة = $\int_{ا}^{جـ}$ د(س) ءس − $\int_{جـ}^{ب}$ د(س) ءس

٤) المساحة المحصورة بين المنحنيين ص١ ،ص٢ متصلين على [أ ، ب] ومتقاطعين في نقطتين هي :

م = $\int_{أ}^{ب}$ | ص١ − ص٢ | ءس

⑤ إذا دارت منطقة مستوية بالمنحنى ص = د(س) على الفترة [أ،ب] دورة كاملة حول محور سـ فإن : حجم الجسم الناشئ من الدوران = ط $\int_{أ}^{ب}$ ص٢ ءس

⑥ حجم الجسم الناتج من دوران منطقة بين المنحنيين ص١ ، ص٢ على الفترة [أ ، ب]

هو : ط $\int_{أ}^{ب}$ | ص١٢ − ص٢٢ | ءس

⑦ ملاحظات : ١) ⑦ تتولد الأسطوانة الدائرية القائمة من دوران منطقة مستوية محدودة بمستطيل دورة كاملة حول أحد أضلاعه

٢) المخروط الدائري القائم يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي القائمة

٣) المخروط الدائري القائم الناقص يتولد من دوران شبه منحرف قائم حول ارتفاعه

٤) تتولد الكرة من دوران نصف دائرة حول قطرها دورة كاملة

٣١) تابع قواعد الاشتقاق:

ص = د(س)	ص َ = د َ (س) = $\frac{ءص}{ءس}$
لو د(س)	$\frac{د َ(س)}{د(س)}$
لو$_{أ}$ د(س)	$\frac{د َ(س)}{د(س) . لو أ}$
$e^{د(س)}$	د َ(س) $e^{د(س)}$
$أ^{د(س)}$	د َ(س) $أ^{د(س)}$ لو أ

٣٢) ملاحظة مهمة : $e^{لو د(س)}$ = د(س) = لو $e^{د(س)}$

٣٣) تابع قواعد التكامل :

① $\int e^{س}$ ءس = $e^{س}$ + ث

② $\int e^{د(س)}$. د َ(س) ءس = $e^{د(س)}$ + ث

③ $\int أ^{س}$ ءس = $\frac{أ^{س}}{لو أ}$ + ث

④ $\int أ^{د(س)}$. د َ(س) ءس = $\frac{أ^{د(س)}}{لو أ}$ + ث

⑤ إذا كان البسط = مشتقة المقام فإن التكامل = لو { المقام } + ث

تدريبات

١	إذا كان ك عدداً ثابتاً فإن $\lim_{س \to \pm\infty}$ ك = ...			
	(أ) صفر	(ب) ك	(ج) ١	(د) ∞
٢	إذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ ب س^{٢} + ٥س − ٢ = ٢٠ فان : ب = ...			
	(أ) ٢	(ب) ٣	(ج) ٤	(د) ٢٠
٣	$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٩ س}{س}$ = ...			
	(أ) ٠	(ب) ١	(ج) ٩	(د) ± ٩
٤	$\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥س}{٣س}$ = ...			
	(أ) ١	(ب) $\frac{٥}{٣}$	(ج) ٣	(د) ٥
٥	$\lim_{س \to ٠} \frac{٧ظاس + جا ٢س}{س}$ = ...			
	(أ) ٧	(ب) ٩	(ج) ١٦	(د) ٦٣
٦	$\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٣س ظا ٥س}{س^{٢}}$ = ...			
	(أ) ٣	(ب) ٥	(ج) ٨	(د) ١٥
٧	إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ $\frac{جا (س - ٥)}{(س - ٥)}$ = ١ فإن قيمة أ = ...			
	(أ) − ٥	(ب) صفر	(ج) ١	(د) ٥
٨	$\lim_{س \to ٠} \frac{٤ - ٤ جتاس}{٤س}$ = ...			
	(أ) − ٤	(ب) صفر	(ج) ١	(د) ٤

٩	$\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س^{٢} - ٤س - ٥} =$ .....
	(أ) صفر (ب) $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ٦ (د) ٨
١٠	$\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٨}{س + ٢} =$ .....
	(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢
١١	$\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} =$ .....
	(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٥
١٢	$\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س^{٢} - ٤}$ حا٢س = ...
	(أ) -٣ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٣
١٣	$\lim_{س \to \infty} \frac{٧س}{س^{٢} + ٥} =$ .....
	(أ) -٥ (ب) صفر (جـ) ٧ (د) ∞
١٤	$\lim_{س \to \infty} \frac{٤}{س}$ جاس = ...
	(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ∞
١٥	$\lim_{س \to \infty}$ $٣^{-س}$ = ...
	(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ∞
١٦	$\lim_{س \to \infty} \frac{س - ٥}{\sqrt{٩ - س^{٢}}} =$ .....
	(أ) -١ (ب) ١ (جـ) ∞ (د) ليس لها وجود
١٧	إذا كان منحنى الدالة د(س) متناظر حول محور الصادات فإن الدالة د(س) تكون.....
	(أ) زوجية (ب) فردية (جـ) لا زوجية ولا فردية (د) محدودة

١٨	إذا كان منحنى الدالة د(س) متناظر حول نقطة الأصل فإن الدالة د(س) تكون.....			
	(أ) زوجية	(ب) فردية	(ج) لا زوجية ولا فردية	(د) محدودة
١٩	الدالة د(س) = س جـــاس			
	(أ) زوجية	(ب) فردية	(ج) لا زوجية ولا فردية	(د) محدودة
٢٠	الدالة د(س) = {س} هي دالة			
	(أ) زوجية	(ب) فردية	(ج) لا زوجية ولا فردية	(د) محدودة
٢١	مكعب من الثلج ينصهر بمعدل ٦ سم^{٣} / ث فإن معدل تغير طول ضلعه عندما يكون طول الضلع ٢ سم يساوي			
	(أ) – ٧٢ سم / ث	(ب) – $\frac{١}{٢}$ سم / ث	(ج) $\frac{١}{٢}$ سم / ث	(د) ٧٢ سم / ث
٢٢	ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ عند س = – ١ يساوي.....			
	(أ) – ١	(ب) ١	(ج) صفر	(د) غير معرف
٢٣	إذا كانت د(س)= = $\frac{١٦}{س^{٣}}$ فإن د$'$(١) تساوي			
	(أ) –٣	(ب) ٣	(ج) – ٤٨	(د) ١٦
٢٤	الزاوية التي يصنعها مماس الدالة ص = س – ١ عند س = ١مع محور السينات تساوي ...			
	(أ) ٤٥°	(ب) ٣٠°	(ج) ١٥°	(د) صفر°
٢٥	قيمة أ التي تجعل للدالة د(س) = أس^{٢} + $\frac{٨}{س}$ مماس أفقي عند س= ١ هي			
	(أ) – ٨	(ب) – ٤	(ج) صفر	(د) ٤

٢٦	مشتقة الدالة د(س) = جا٢ س تساوي			
	(أ) ٢س جتا س	(ب) ٢س جا س	(ج) ٢ جا س	(د) جا٢س
٢٧	إذا كانت ص = ٥$^{س^{٢}}$ فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ = ...			
	(أ) ٢س	(ب) ٥ $س^{٢}$	(ج) ٢س٢لو٥	(د) ٢س×٥$^{س^{٢}}$ لو٥
٢٨	إذا كانت د(س) = لو$_{هـ}$ س فإن : د`(١) =.....			
	(أ) $\frac{١}{٢}$	(ب) – $\frac{١}{٢}$	(ج) صفر	(د) ١
٢٩	إذا كانت د(س) = لو س^{٢} فإن د`(–١) = ...			
	(أ) $\frac{١}{٢}$	(ب) ٢	(ج) – ٢	(د) – $\frac{١}{٢}$
٣٠	إذا كانت د(س) = $هـ^{س}$ + ١ فإن د`(٠) = ...			
	(أ) صفر	(ب) ١	(ج) ٢	(د) غير ذلك
٣١	إذا كانت ص = قـا س فإن $\frac{ع ص}{ع س}$ =			
	(أ) قتا س	(ب) ظاس	(ج) قا س ظا س	(د) قتاس ظتاس
٣٢	إذا كانت ص = جـا س فان $\frac{ع^{٣} ص}{ع س^{٣}}$ =			
	(أ) جا س	(ب) – جا س	(ج) جتا س	(د) – جتا س
٣٣	عدد النقاط الحرجة للدالة د (س) = ٣ يساوي			
	(أ) ١	(ب) ٣	(ج) صفر	(ء) عدد لا نهائي
٣٤	إذا كانت المسافة ف = ٩٦ ن – ١٦ ن^{٢} قدماً فإن أقصى إرتفاع يصل إليه الجسم يساوي..			
	(أ) ٣ قدماً	(ب) ١٦ قدماً	(ج) ٣٢ قدم	(د) ١٢٨ قدماً

٣٥	إذا كان د(٢) = ٥ ، د`(٢) = ٠ ، د``(٢) = ٧ فإن للمنحنى قيمة صغرى محلية هي ...

(أ) صفر	(ب) ٢	(جـ) ٥	(د) ٧

٣٦	إذا كان للدالة د(س) = س^{٢} − $\frac{أ}{س}$ نقطة حرجة عند س=١ فإن قيمة أ = ...

(أ) ٢	(ب) ١	(جـ) صفر	(د) − ١

٣٧	اذا كانت د(س) =أس^{٢}+ب س+ هـ تحقق شروط نظرية رول على [٠،٢] ، حيث أ ، ب ، هـ ∈ ح فإن قيمة جـ التي تحقق النظرية تساوي .....

(أ) ب	(ب) هـ	(جـ) صفر	(د) ١

٣٨	قيمة جـ التي تعينها نظرية القيمة المتوسطة للدالة د (س) = س − $\sqrt{س}$ على الفترة [٤ ، ٩] تساوي .....

(أ) $\frac{٢٥}{٤}$	(ب) ٥	(جـ) ٦	(د) ٨

٣٩	إذا كانت للدالة د (س) = أ س^{٣} - ١٢ س^{٢} نقطة انعطاف عند س = ١ فإن قيمة أ تساوي .....

(أ) ٢	(ب) ٤	(جـ) ٦	(د) ٨

٤٠	$\frac{ء ص}{ء س}$ ($\int_{١}^{٢}$ $\sqrt{س^{٣}+٥}$ ء س) = ...

(أ) ٥	(ب) ٢	(جـ) ١	(د) صفر

٤١	إذا كانت د(س) = $\frac{٣س^{٣}+١}{س^{٢}+١}$ فإن $\int_{١}^{٠}$ د`(س) ء س = ...

(أ) صفر	(ب) ١	(جـ) ٢	(د) ٣

٤٢	إذا كان $\int_{٣}^{٧}$ ك ء س = ٦٤ حيث ك عدد حقيقي ثابت فإن قيمة ك تساوي .....

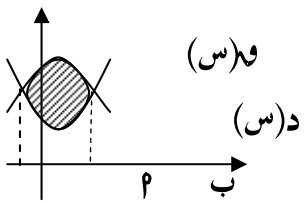
(أ) ٤	(ب) ٧	(جـ) ١٠	(د) ١٦

٤٣	الدالة ل(س) =$\sqrt{هـ^{س}}$ تمثل على الفترة (٠، ∞) دالة أصلية للدالة د (س) =....

(أ) $\sqrt{هـ^{س}}$ / ٢هـ	(ب) $\sqrt{هـ^{س}}$ / ٢$\sqrt{س}$	(جـ) $(\sqrt{هـ})^{س}$ / ٢س	(د) $\sqrt{هـ^{س}}$ / ٢

٤٤	إذا كانت ل(س) دالة أصلية للدالة د(س)، ل(٢) =١، ل(٥) = ٤ فإن $\int_{٢}^{٥}$ د(س) = ...

	(أ) -٣	(ب) -٢	(ج) ٣	(د) ٧
٤٥	إذا كان : $\int_{٦}^{س^{٢}-٤} د(س)$ ء س = صفر فإن : س = ...			
	(أ) ٤	(ب) ٥	(ج) ٦	(د) ١٠
٤٦	$\int \frac{١}{س \ لو س}$ ء س = ...			
	(أ) لو س	(ب) لو لو س	(ج) س	(د) ١
٤٧	$س \int_{١}^{ه} \frac{١}{س}$ ء س = ...			
	(أ) س	(ب) لوس	(ج) ١	(د) $١-ه$
٤٨	التعويض المناسب للتكامل: $\int \sqrt{٩ - س^{٢}}$ هو :			
	(أ) س = ٣ جا ص	(ب) س = ٣ جتا ص	(ج) س = ٣ ظا ص	(د) س = ٣ قا ص
٤٩	إذا كانت الدالة قابلة للتكامل على الفترة [١ ، ٦] فإن: $\int_{١}^{٦} د(س)$ ء س + $\int_{٥}^{٦} د(س)$ ء س − $\int_{١}^{٦} د(س)$ ء س = ...			
	(أ) ٦	(ب) ٥	(ج) ١	(د) صفر
٥٠	إذا كان $\int_{-٣}^{٢} د(س)$ ء س = ٦ فإن قيمة $\int_{٢}^{-٣} [٥ + ٢ د(س)]$ ء س =			
	(أ) -٣٧	(ب) -١٣	(ج) ٧	(د) ١٧
٥١	إذا كان $\int_{-٢}^{٢} \{د(س)\}$ ء س = ١٦ فإن $\int_{-٢}^{٢} \sqrt{[د(س)]^{٢}}$ ء س = ...			
	(أ) ٣٢	(ب) ١٦	(ج) ٨	(د) ٤
٥٢	$\int_{١}^{ه} لو س$ ء س + $\int_{١}^{ه} لو \frac{١}{س}$ ء س = ...			
	(أ) صفر	(ب) ١	(ج) ٣	(د) ٥
٥٣	$\int_{٠}^{١} ٣^{س^{٢}} لو ٣^{س}$ ء س = ...			

	(أ) صفر	(ب) ١	(ج) $\frac{٣}{٢}$	(د) ٥
٥٤	إذا كان $\int_{١}^{٢}$ د (س) ء س = ٧ ، $\int_{١}^{٣}$ د (س) ء س = ١٠ ، فإن $\int_{٢}^{٣}$ د (س) ء س =...			
	(أ) صفر	(ب) ١	(ج) ٣	(د) ٥
٥٥	إذا كان $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س = ٧ × ٥ ^{٣} - ٧ × ٣ ^{٣} فإن د (س) = ...			
	(أ) ٧ س ^{٣}	(ب) ٣ س ^{٧}	(ج) ٢١ س ^{٢}	(د) غيرذلك
٥٦	إذا كان طول الفترة الجزئية لتجزئ منتظم للفترة [ب ، ٥] هو ٠.٤ وعدد الفترات الجزئية ١٠ فترات ، فإن ب = ...			
	(أ) ١	(ب) ٢	(ج) ٣	(د) ٤
٥٧	إذا كان : $\int_{أ}^{-٢}$ أ ء س = − ١٨ حيث أ عدد ثابت فإن أ=			
	(أ) ± ١	(ب) ± ٢	(ج) ± ٣	(د) ± ٤
٥٨	قيمة العدد س ٠ التي تحققه نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{٠}^{٢}$ (٢ س+٤) ء س تساوي ..			
	(أ) ١	(ب) $\frac{٣}{٢}$	(ج) ٢	(د) ٣
٥٩	إذا كانت مساحة المنطقة المظللة في الشكل المقابل ٤ وحدات مربعة وكان $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ءس = ١٠ ، فإن $\int_{ب}^{أ}$ و(س) ءس = : 			
	(أ) − ١٤	(ب) −٦	(ج) ٦	(د) ١٤
٦٠	حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص= س ، ومحور السينات على الفترة [٠، ٣] دورة كاملة حول محور السينات = ...			
	(أ) ٦ط	(ب) ١٨ط	(ج) ٩ط	(د) ٣ط

٦١	∫ ($e^{س}$ + ١) ء س = ...
	(أ) $e^{س}$ + س (ب) $e^{س}$ + ١ (ج) $e^{س}$ + ث (د) $e^{س}$ + س + ث
٦٢	عدد النقاط الحرجة للدالة : د(س) = ٣ س + ٥ يساوي .....
	(أ) صفر (ب) ٣ (ج) ٥ (د) عدد لا نهائي
٦٣	∫ ظا س ء س = ...
	(أ) لو{جا س}+ث (ب) لو{جتا س}+ث (ج) -لو{جا س}+ث (د) -لو{ جتاس}+ث
٦٤	∫ ظتا س ء س = ...
	(أ) لو{جا س}+ث (ب) لو{جتا س}+ث (ج) -لو{جا س}+ث (د) -لو{ جتاس}+ث
٦٥	∫ $e^{ه}$ ء س = ...
	(أ) $e^{ه}$ + ث (ب) $e^{ه}$ س + ث (ج) $e^{س}$ + ث (د) $e^{ه^{س}}$ + ث

مفاتيح الحلول الصحيحة

[١]

التدريب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الفقرة	ب	جـ	ب	أ	ب	جـ	ب	ب	د
التدريب	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
الفقرة	أ	د	د	جـ	ب	ب	جـ	أ	د
التدريب	١٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧
الفقرة	د	ب	جـ	جـ	د	ب	ب	أ	ب
التدريب	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	
الفقرة	أ	جـ	ب	أ	ب	أ	جـ	أ	

[٢]

التدريب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الفقرة	ب	ب	جـ	ب	ب	د	د	ب	ب
التدريب	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
الفقرة	د	أ	ب	ب	أ	د	د	أ	ب
التدريب	١٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧
الفقرة	أ	ب	جـ	أ	جـ	أ	د	د	د
التدريب	٣٨	٣٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦
الفقرة	أ	جـ	ب	جـ	د	د	د	جـ	أ
التدريب	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥
الفقرة	د	أ	ب	د	جـ	د	د	جـ	ب
التدريب	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤
الفقرة	ب	أ	أ	د	أ	ب	أ	جـ	جـ
التدريب	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣
الفقرة	جـ	أ	جـ	أ	جـ	جـ	د	أ	د
التدريب	٦٤	٦٥							
الفقرة	ب	ب							

و آخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين