)(مبدأ العد)(

مبدأ العدد :

إذا أمكن إجراء عملية بطرق مختلفة عددها م ، وكان لدينا في نفس الوقت عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق مختلفة عددها ن ، فإن : عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

كثيراً ما نحتاج إلى معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن نرتب بها مجموعة من الأشياء تحت شروط معينة ، ونظرية التباديل والتوافيق تساعدنا في التعرف على وسائل حساب هذه الطرق ، وسوف يتضح لنا ذلك من خلال مناقشة الأمثلة الآتية :

السؤال (١) : نفرض أن محلاً تجارياً له ٤ أبواب أراد شخص دخول هذا المحل فإنه يستطيع الدخول من أحد هذه الأبواب الأربعة ، أي أن : عدد طرق دخول المحل = ٤ طرق

وإذا أراد هذا الشخص الخروج من المحل على ألا يستعمل نفس الباب الذي دخل منه فإنه يستطيع أن يخرج من أحد الأبواب الثلاثة التي لم يدخل من أحدها ، أي أن : عدد طرق الخروج من المحل من باب غير الذي دخل منه = ٣ طرق ، والسؤال الآن : بكم طريقة يمكن لهذا الشخص أن يجري العمليتين معاً ، أي يدخل ويخرج من المحل من بابين مختلفين ؟

(أ) ١٢	(ب) ١٠
(جـ) ٦	(د) ٨

الحل :

نفرض أن أ١ ، أ٢ ، أ٣ ، أ٤ ترمز إلى الأبواب الأربعة للمحل .

- إذا دخل من الباب أ١ كان عليه أن يخرج من أحد الأبواب : أ٢ ، أ٣ ، أ٤

أي أن هناك ٣ طرق للدخول والخروج من المحل إذا دخل من الباب أ١

- وإذا دخل من الباب أ٢ كان عليه أن يخرج من أحد الأبواب : أ١ ، أ٣ ، أ٤

أي أن هناك ٣ طرق أخرى للدخول والخروج من المحل إذا استخدم الباب أ٢

- وكذلك توجد ٣ طرق إذا استخدم الباب أ٣ ، وكذلك ٣ طرق إذا استخدم الباب أ٤

إذاً عدد الطرق المختلفة للدخول والخروج من المحل من بابين مختلفين = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة

السؤال (٢) : إذا كان لدينا الأرقام ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ وأردنا أن نعرف كم عدداً مكوناً من ثلاث أرقام من هذه الأرقام الأربعة يمكن تكوينها بحيث لا يتكرر أي رقم في العدد الواحد ؟

(أ) ١٢	(ب) ١٦
(جـ) ٨	(د) ٢٤

الحل :

الأعداد التي سنكونها يحتوي كل منها على رقم آحاد وآخر عشرات والثالث مئات .

- إذا بدأ بكتابة رقم الآحاد فيكون أمامنا ٤ اختيارات فإما نكتب ٣ أو ٥ أو ٧ أو ٩

أي أن عدد طرق كتابة رقم الآحاد = ٤ طرق

- حين نكتب بعد ذلك رقم العشرات فيكون أمامنا ٣ اختيارات فقط حيث استبعدنا الرقم الذي كتبناه في خانة الآحاد لأن اشترطنا عدم التكرار.

عدد طرق كتابة رقم العشرات = ٣ طرق

- حين نكتب بعد ذلك رقم المئات فلا يكون أمامنا سوى خيارين فقط حيث استبعدنا الرقمين الذي كتبناهما في خانتي الآحاد والعشرات .

عدد طرق كتابة رقم المئات = ٢ طريقة

إذاً عدد طرق كتابة أرقام الآحاد والعشرات والمئات = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤ عدداً

السؤال (٣) : إذا كان لدى شخص ٤ بدل ، ٦ قمصان فبكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص في زي مكون من بدله و قميص ؟

(أ) ١٢	(ب) ١٨
(جـ) ١٠	(د) ٢٤

الحل :

عدد طرق اختيار البدل = ٤ طرق

عدد طرق اختيار القمصان = ٦ طرق

عدد طرق أن يظهر في زي مكون من بدله وقميص = ٤ × ٦ = ٢٤

السؤال (٤) : كم عدد مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام : ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان غير مسموح بتكرار أي رقم في العدد ؟

(أ) ٩	(ب) ١٦
(جـ) ١٢	(د) ٢٠

الحل :

خانة الآحاد يمكن ملؤها بطرق عددها = ٥

خانة العشرات يمكن ملؤها بطرق عددها = ٤ (بعد استبعاد رقم الآحاد لمنع التكرار)

إذاً عدد طرق ملء الخانتين معاً = ٥ × ٤ = ٢٠ عدداً

السؤال (٥) : كم عدد مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام : ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا سمح بالتكرار ؟

(أ) ١٠	(ب) ٢٥
(جـ) ٣٠	(د) ٢٠

الحل :

خانة الآحاد يمكن ملؤها بطرق عددها = ٥

خانة العشرات يمكن ملؤها بطرق عددها = ٥ (حيث يسمح بالتكرار)

إذاً عدد طرق ملء الخانتين معاً أي عدد الأعداد = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً

السؤال (٦) : بكم طريقة يمكن لخمس أشخاص الجلوس على خمس مقاعد متجاورة ؟

(أ) ٢٥	(ب) ١٠
(جـ) ١٢٠	(د) ٥

الحل :

- الشخص الأول يستطيع الجلوس على أي مقعد من المقاعد الخمسة

إذاً عدد طرق إجلاس الشخص الأول = ٥ طرق

- الشخص الثاني يستطيع أن يجلس على أي كرسي من الكراسي الأربعة الباقية بعد جلوس الشخص الأول .

إذاً عدد طرق إجلاس الشخص الثاني = ٤ طرق

- الشخص الثالث يستطيع أن يجلس على أي كرسي من الكراسي الباقية بعد جلوس الشخصين الأول والثاني .

إذاً عدد طرق إجلاس الشخص الثالث = ٣ طرق

- الشخص الرابع يستطيع أن يجلس على أي كرسي من الكراسي الباقية بعد جلوس الأشخاص الثلاثة .

إذاً عدد طرق إجلاس الشخص الرابع = ٢ طريقة

- الشخص الخامس يستطيع أن يجلس على أي كرسي من الكراسي الباقية بعد جلوس الأشخاص الأربعة .

إذاً عدد طرق إجلاس الشخص الخامس = ١ طريقة

إذاً عدد طرق إجلاس الأشخاص الخمسة = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

السؤال (٧) : بكم طريقة يمكن لأربعة أشخاص الجلوس في صف به ٨ مقاعد ؟

(أ) ٣٣٦	(ب) ١٦٨٠
(جـ) ٣٢	(د) ١٢٨

الحل :

الشخص الأول يستطيع الجلوس على أي مقعد من المقاعد الـ ٨

الشخص الثاني يستطيع الجلوس على أي مقعد من المقاعد الـ ٧ (بعد استبعاد مقعد للشخص الأول)

الشخص الثالث يستطيع الجلوس على أي مقعد من المقاعد الـ ٦ (بعد استبعاد مقعدين لـ الشخص الأول والثاني)

الشخص الرابع يستطيع الجلوس على أي مقعد من المقاعد الـ ٥ (بعد استبعاد مقاعد الأشخاص الثلاثة)

إذاً عدد طرق إجلاس الأشخاص الأربعة = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٦٨٠ طريقة

السؤال (٨) : إذا أردنا أختيار الرئيس ونائب الرئيس لمجلس إدارة أحد الأندية المكون من أربعة أشخاص هم : إبراهيم ، بدر ، جاسم ، داود ، أذكر عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائب الرئيس ؟

(أ) ١٢	(ب) ١٦
(جـ) ٨	(د) ٤

الحل :

الطرق الممكنة هي :

إبراهيم وَبدر ، إبراهيم وَجاسم ، إبراهيم وَداود ، بدر وَجاسم ، بدر وَداود ، جاسم وَداود

بدر وَإبراهيم ، جاسم وَإبراهيم ، داود وَإبراهيم ، جاسم وَبدر ، داود وَبدر ، داود وَجاسم

عددها = ١٢

لاحظ أن الاختيار : إبراهيم وَبدر يختلف عن الاختيار بدر وَإبراهيم

فإذا كان الاختيار الأول يعني أن إبراهيم هو الرئيس وَبدر نائب الرئيس

فإن الاختيار الثاني يعني أن بدر هو الرئيس وإبراهيم هو نائب الرئيس

ممكن الحل بطريقة مختلفة :

نحن أما عمليتين ، الأولى اختيار الرئيس وتتم بطرق عددها أربعة حيث يمكن اختيار أي من الأشخاص الأربعة لشغل هذا المنصب . والعملية الثانية هي عملية اختيار نائب الرئيس وتتم بطرق عددها ثلاث حيث يمكن اختيار أي من الأشخاص الثلاثة الباقين بعد اختيار الرئيس .

عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائب الرئيس = ٤ × ٣ = ١٢

السؤال (٩) : توجد خمسة طرق مختلفة تربط المدينتين أ ، ب . بكم طريقة يستطيع أحد الأشخاص القيام برحلة ذهاباً وعودة من المدينة أ إلى المدينة ب بحيث يأخذ في العودة طريقاً يختلف عن طرق الذهاب ؟

(أ) ٩	(ب) ١٦
(جـ) ١٠	(د) ٢٠

الحل :

يمكن اختيار طريق الذهاب بطرق عددها = ٥

يمكن اختيار طرق العودة بطرق عددها = ٤

إذاً عدد الطرق الممكنة لرحلة الذهاب والعودة = ٥ × ٤ = ٢٠

السؤال (١٠) : يتكون مجلس إدارة إحدى المؤسسات من خمس أشخاص . بكم طريقة يمكن اختيار رئيس وَنائب رئيس وَأمين سر من بين أعضاء مجلس الإدارة ؟

(أ) ٦٠	(ب) ٢٤
(جـ) ١٢٠	(د) ٥

الحل :

عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس = ٥

عدد الطرق الممكنة لاختيار نائب رئيس = ٤

عدد الطرق الممكنة لاختيار أمين السر = ٣

إذاً عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائب الرئيس وأمين السر = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة

السؤال (١١) : تضم قائمة الطعام الخاصة بأحد المطاعم ٤ أنواع من الشوربة ، ٥ أطباق مختلفة من اللحوم ، ٦ طباق مختلفة من الحلوى ، ٤ أنواع مختلفة من العصير . بكم طريقة يمكن لأحد رواد هذا المطعم يطلب وجبة تتكون من الشوربة واللحم والحلوى والعصير ؟

(أ) ٤٨٠	(ب) ٢٤٠
(جـ) ١٠٠	(د) ٣٢٠

الحل :

توجد ٤ طرق ممكنه لاختيار الشوربة حيث يوجد أربعة أنواع منها .

توجد ٥ طرق ممكنه لاختيار طبق اللحم حيث يوجد خمسة أنواع منها .

توجد ٦ طرق ممكنه لاختيار طبق الحلوى حيث يوجد ستة أنواع منها .

توجد ٤ طرق ممكنه لاختيار العصير حيث يوجد أربعة أنواع منها

إذاً عدد الطرق الممكنة لاختيار الوجبة كاملة = ٤ × ٥ × ٦ × ٤ = ٤٨٠ طريقة

السؤال (١٢) : يحوي أحد الرفوف في المكتبة ٧ كتب عربية ، ٥ كتب إنجليزية ، ٤ كتب فرنسية بكم طريقة يستطيع أحد الأشخاص اختيار ثلاثة كتب أحدها بالعربية والثاني بالإنجليزية والثالث بالفرنسية ؟

(أ) ١٦	(ب) ١٧٥
(جـ) ١٠٥	(د) ١٤٠

الحل :

توجد ٧ إمكانات لاختيار كتاب باللغة العربية .

توجد ٥ إمكانات لاختيار كتاب باللغة الإنجليزية .

توجد ٤ إمكانات لاختيار كتاب باللغة الفرنسية .

إذاً عدد الطرق الممكنة لاختيار الكتب الثلاثة = ٧ × ٥ × ٤ = ١٤٠ طريقة

السؤال (١٣) : بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص أن يستخدموا في آن واحد أجهزة الهاتف في دائرة تحتوي ٨ أجهزة ؟

(أ) ١٦٨٠	(ب) ٨٤٠
(جـ) ٦٧٢٠	(د) ٢٥٢٠

الحل :

بما أن كل شخص سيستخدم جهازاً .

إذاً أمام الشخص الأول ٨ إمكانات ، وأمام الشخص الثاني ٧ إمكانات ، وأمام الشخص الثالث ٦ إمكانات ، وأمام الشخص الرابع ٥ إمكانات ، ويبقى في النهاية أمام الشخص الخامس ٤ إمكانات .

إذاً عدد الطرق الممكنة = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٦٧٢٠ طريقة

السؤال (١٤) : طلب من أحد المصانع عمل لوحات معدنية للسيارات تبدأ رموزها من اليمين بحرف من حروف الهجاء العربية متبوعاً بأربعة أرقام من مجموعة الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

كم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا لم يسمح بتكرار الأرقام ؟

(أ) ٨٤٦٧٢	(ب) ٨١٦٤٨
(جـ) ٧٠٥٦٠	(د) ١٣١٠٤٠

الحل :

سنأخذ اللوحة المعدنية الشكل الآتي

٥	٤	٣	٢	١

حيث يملأ الفراغ الأول بأحد الحروف الهجائية وعددها ٢٨

ثم يملأ كل فراغ من الفراغات الأربعة المتبقية بأحد الأرقام التسعة

يملأ الفراغ الأول بطرق عددها = ٢٨

يملأ الفراغ الثاني بطرق عددها = ٩

يملأ الفراغ الثالث بطرق عددها = ٨

يملأ الفراغ الرابع بطرق عددها = ٧

يملأ الفراغ الخامس بطرق عددها = ٦

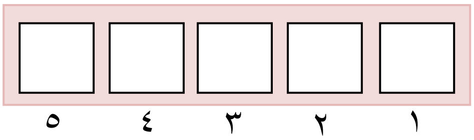
إذاً يكون عدد اللوحات التي يمكن صنعها في هذه الحالة = ٢٨ × ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٨٤٦٧٢

السؤال (١٥) : طلب من أحد المصانع عمل لوحات معدنية للسيارات تبدأ رموزها من اليمين بحرف من حروف الهجاء العربية متبوعاً بأربعة أرقام من مجموعة الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
كم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا سمح بتكرار الأرقام ؟

(أ) ١١٤٦٨٨	(ب) ١٨٣٧٠٨
(جـ) ٨٤٦٧٢	(د) ٤٢٣٣٦٠

الحل :

سنأخذ اللوحة المعدنية الشكل الآتي



حيث يملأ الفراغ الأول بأحد الحروف الهجائية وعددها ٢٨

ثم يملأ كل فراغ من الفراغات الأربعة المتبقية بأحد الأرقام التسعة

يملأ الفراغ الأول بطرق عددها = ٢٨

يملأ الفراغ الثاني بطرق عددها = ٩

يملأ الفراغ الثالث بطرق عددها = ٩

يملأ الفراغ الرابع بطرق عددها = ٩

يملأ الفراغ الخامس بطرق عددها = ٩

ويكون عدد اللوحات التي يمكن صنعها في هذه الحالة = ٢٨ × ٩ × ٩ × ٩ × ٩ = ١٨٣٧٠٨

السؤال (١٦) : إذا كان لدينا الأرقام ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٩ ومطلوب منا إيجاد جميع الأعداد ذات الرقمين والتي يمكن اختيارها من هذه الأرقام الأربعة بحيث لا يتكرر أي رقم في العدد الواحد :

(أ) ١٢	(ب) ٦
(جـ) ١٦	(د) ٢٤

الحل :

بما أن كل عدد مكون من رقمين فيكون به خانتان خانة الآحاد وخانة العشرات .

- إذا ملأنا خانة الآحاد بالرقم ٣ مثلاً أمكن ملء خانة العشرات بأحد الأرقام الباقية وهي : ٧ ، ٥ ، ٩
فيكون عدد الأعداد المتكونة هي ثلاثة .

- إذا ملأنا خانة الآحاد بالرقم ٧ أمكن ملء خانة العشرات بأحد الأرقام الباقية وهي : ٣ ، ٥ ، ٩
فيكون عدد الأعداد المتكونة أيضاً ثلاثة .

- إذا ملأنا خانة الآحاد بالرقم ٥ أمكن ملء خانة العشرات بأحد الأرقام الباقية وهي : ٣ ، ٧ ، ٩
فيكون عدد الأعداد المتكونة هي ثلاثة .

- إذا ملأنا خانة الآحاد بالرقم ٩ أمكن ملء خانة العشرات بأحد الأرقام الباقية وهي : ٣ ، ٧ ، ٥
ويكون عدد الأعداد المتكونة هي ثلاثة .

إذاً عدد الأعداد جميعها = ٣ + ٣ + ٣ + ٣ = ٤ × ٣ = ١٢ عدداً

تفسير آخر :

واضح أن خانة الآحاد يمكن ملؤها بكل من الأرقام ٣ ، ٧ ، ٥ ، ٩ أي بأربع طرق .

فإذا ما حل أحدها في تلك الخانة أمكن ملء خانة العشرات بثلاث طرق (وهي عدد الأرقام الباقية) وبذلك يكون عدد جميع الطرق = ٤ × ٣ = ١٢ عدداً

السؤال (١٧) : إذا كانت س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } أحسب عدد عناصر س × ص

(أ) ١٢	(ب) ٦
(جـ) ١٦	(د) ٢٤

الحل :

نعلم أن س × ص = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص }

أي مجموعة الأزواج المرتبة التي ينتمي المسقط الأول منها إلى س والمسقط الثاني منها إلى ص .

عدد طرق اختيار المسقط الأول = ٥

عدد طرق اختيار المسقط الثاني = ٣

إذاً عدد طرق اختيار عنصر من س متبوعاً بعنصر من ص هو ٥ × ٣ = ١٥ طريقة

أي أن عدد عناصر س × ص = ٥ × ٣ = ١٢ عنصراً

السؤال (١٨) : في بداية سباق للجري أراد ٤ طلاب أن يصطفوا على خط مستقيم . فبكم طريقة يمكنهم الانتظام على هذا الخط ؟

(أ) ١٢	(ب) ٦
(جـ) ١٦	(د) ٢٤

الحل :

بفرض أن هناك ٤ أماكن خالية على الخط المستقيم .

- يمكن شغل المكان الأول بواحد من الطلبة الأربعة أي بطرق عددها ٤

إذاً عدد الطلاب الباقين هو ٣

- عدد طرق شغل المكان الثاني = ٣ إذاً عدد الطلاب الباقين بعد ذلك = ٢

- عدد طرق شغل المكان الثالث = ٢ طريقة ويكون عدد الطلاب الباقين بعد ذلك = ١

- عدد طرق شغل المكان الرابع = ١

إذاً عدد طرق شغل الأماكن الأربعة معاً = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

السؤال (١٩) : كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل ، يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ١} ليكون العدد أقل من ٥٠٠ ، ويسمح بتكرار الأرقام في العدد الواحد ؟

(أ) ٧٥	(ب) ١٤٤
(جـ) ١٠٨	(د) ١٥٠

الحل :

حتى يكون العدد أقل من ٥٠٠ يجب أن تكون خانة المئات أقل من ٥ ، وبذلك يكون عدد الاختيارات الممكنة لخانة المئات = ٣

وبما أن التكرار مسموح ، فإن عدد الاختيارات لكل من خانة العشرات ، وخانة الآحاد يساوي ٦

إذاً عدد الأعداد المطلوبة = ٣ × ٦ × ٦ = ١٠٨ عدد

السؤال (٢٠) : كم كلمة من ثلاثة أحرف يمكن تكوينها من الأحرف {أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و} مع ملاحظة عدم ضرورة أن يكون للكلمة معنى علماً بأن التكرار غير مسموح ؟

(أ) ١٢٠	(ب) ٦٠
(جـ) ١٦٠	(د) ٢٤٠

الحل :

عدد طرق اختيار الحرف الأول = ٦

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = ٥

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = ٤

إذاً عدد الكلمات التي يمكن تكوينها في هذه الحالة = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ كلمة

)(التبـــاديــل)(

تعريف :

١) التبديل : هو <u>ترتيب</u> لعناصر مجموعة منتهية بنظام معين بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة .

" إن أي ترتيب يتم إجراؤه باستعمال بعض أو كل عناصر مجموعة من الأشياء المتمايزة دون تكرار يسمى (تبديلاً) فمثلاً الأعداد ٣١ ، ٤٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، هي بعض التباديل لعناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} مأخوذة إثنان في كل مرة ، والأعداد ٢٣١ ، ٣٢٤ ، ٤٢٣ ، هي بعض التباديل لعناصر المجموعة نفسها مأخوذة ثلاثة في كل مرة .

٢) عدد تباديل (ن) من الأشياء مأخوذة (ر) في كل مرة يساوي عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من ن من الأشياء بحيث يحتوي كل ترتيب على ر من هذه الأشياء .

٣) يرمز لذلك بالرمز ل (ن ، ر) ويقرأ لام ن ، ر

٤) يرمز لذلك أيضاً بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ "ويقرأ ن لام ر"

٥) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\ldots\times(ن-ر+١)$ حيث عدد العوامل = ر ، $ر \le ن$

السؤال هو : كيف تحسب عدد هذه التباديل ؟

مثال (١) :

$^{٩}ل_{٢}$ = عدد التراتيب التي يمكن تكوينها من ٩ أشياء مأخوذة من شيئين في كل مرة .

حيث أن الشيئين المأخوذين من الأشياء التسعة نستطيع أن نختار أولهما بتسع طرق وثانيهما بثمانية طرق وحسب مبدأ العد = $^{٩}ل_{٢} = ٩ \times ٨ = ٧٢$

مثال (٢) :

$^{٧}ل_{٤}$ = عدد التراتيب التي يمكن تكوينها من ٧ أشياء مأخوذ منها أربعة أشياء في كل مرة

وحيث أن الأشياء الأربعة المأخوذة من الأشياء السبعة نختار أولها بسبع طرق وثانيها بست طرق وثالثها بخمس طرق ورابعها بأربع طرق ، وحسب مبدأ العد يكون : $^{٧}ل_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$

مثال (٣) :

حاصل ضرب عدة أعداد (صحيحة موجبة) متتالية يمكن التعبير عنها كتباديل

$١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \Longleftarrow$ هي تباديل ١٢ شيء مأخوذ منها ٤ أشياء في كل مرة .

١٨ × ١٧ × ١٦ × ١٥ × ١٤ ⟸ هي تباديل ١٨ شيء مأخوذ منها ٥ أشياء في كل مرة .

٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ ⟸ هي تباديل ٨ أشياء مأخوذة جميعها .

السؤال (٢١) : إذا كان لدينا أربعة أرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وأردنا تكوين أعداد منها بحيث يتكون العدد من رقمين دون تكرار . فما عدد هذه الأعداد الممكنة ؟

(أ) ١٢	(ب) ٨
(جـ) ١٠	(د) ١٤

الحل :

عدد طرق ملء خانة الآحاد = ٤

عدد طرق ملء خانة العشرات بعد ملء خانة الآحاد = ٣

حسب مبدأ العد يكون :

عدد الأعداد ذات الرقمين التي يمكن تكوينها من الأرقام الأربعة = ٤ × ٣ = ١٢ عدداً

حسب قاعدة التباديل :

كل عدد من هذه الأعداد الإثنى عشر يسمى تبديل لأربعة أشياء مأخوذ منها إثنين (أي أجرينا تبديلاً على ٤ أشياء مأخوذة مثنى مثنى) ونرمز لذلك بالصورة $^{٤}ل_{٢}$ وتقرأ " أربعة لام إثنين "

أي أن $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢

وهذه الأعداد هي :

٢١ ، ٣١ ، ٤١

١٢ ، ٣٢ ، ٤٢

١٣ ، ٢٣ ، ٤٣

١٤ ، ٢٤ ، ٣٤

السؤال (٢٢) : إذا كان لدينا ٧ قصص مختلفة وأردنا أن نوزع ثلاث منها على ثلاثة أشخاص ، فكم عدد طرق توزيع القصص السبع على الأشخاص الثلاثة ؟

(أ) ٣٥	(ب) ٢١٠
(جـ) ٦٣	(د) ١٢٠

الحل :

حسب مبدأ العد يكون :

الشخص الأول يمكنه أخذ أي قصة من السبعة ، ثم يختار الشخص الثاني إحدى القصص الست الباقية ، ثم يختار الشخص الثالث إحدى القصص الخمسة المتبقية أي أن :

عدد طرق توزيع القصص السبع على الأشخاص الثلاثة = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠ طريقة

حسب قاعدة التباديل :

كل طريقة من هذه الطرق يسمى تبديل لسبعة أشياء مأخوذ منها ثلاثة

أي يمكن القول بأننا أجرينا تبديلاً على سبعة أشياء مأخوذة ثلاثة ثلاثة ونرمز لذلك بالصورة

$^{٧}ل_{٣}$ وتقرأ " سبعة لام ثلاثة " أي أن :

$^{٧}ل_{٣}$ = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

السؤال (٢٣) : إذا كان هناك ٧ أشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا سوى ٣ مقاعد ، فبكم طريقة يمكن ملء هذه المقاعد الثلاثة معاً ؟

(أ) ٣٥	(ب) ٢١
(جـ) ٢١٠	(د) ١٢٠

الحل :

حسب مبدأ العد يكون :

يمكن ملء المقعد الأول بأي شخص من الأشخاص السبعة أي بطرق عددها ٧

بما إن عدد الأشخاص الباقين بعد ذلك = ٦ أشخاص

إذاً عدد طرق ملء المقعد الثاني = ٦ طرق

عدد الأشخاص الباقين بعد ذلك = ٥ أشخاص

إذاً عدد طرق ملء المقعد الثالث = ٥ طرق

وبناء على مبدأ العد يكون عدد طرق ملء المقاعد الثلاثة معاً = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

حسب قاعدة التباديل :

حيث إن كل طريقة ملء المقاعد الثلاثة هي تبديل لسبعة أشخاص مأخوذة ثلاثة ثلاثة في كل مرة

$^{٧}ل_{٣}$ = ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠

السؤال (٢٤) : إذا كان لدينا خمسة مقاعد وأردنا معرفة عدد الطرق التي يمكن بها إجلاس خمسة أشخاص على هذه المقاعد ؟

(أ) ١٢٥	(ب) ٢٤٠
(جـ) ٢١٠	(د) ١٢٠

الحل :

حسب مبدأ العد يكون :

عدد الطرق التي يجلس بها الأشخاص الخمسة على المقاعد الخمسة = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

حسب قاعدة التباديل :

كل طريقة من هذه الطرق التي عددها ١٢٠ يسمى تباديل لخمسة أشياء مأخوذة كلها ونرمز لذلك بالصورة ^{٥}ل $_{٥}$ وتقرأ " خمسة لام خمسة " أي أن :

^{٥}ل $_{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

السؤال (٢٥) : في بداية سباق للجري أراد ٤ طلاب أن يصطفوا على خط مستقيم فبكم طريقة يمكنهم الانتظام على هذا الخط ؟

(أ) ١٨	(ب) ٢٤
(جـ) ٢٠	(د) ٢١

الحل :

حسب مبدأ العد يكون :

بفرض أن هناك ٤ أماكن خالية على الخط المستقيم .

إذاً يمكن شغل المكان الأول بواحد من الطلبة الأربعة أي بطرق عددها ٤

ومنها عدد الطلاب الباقين هو ٣

إذاً عدد طريق شغل المكان الثاني = ٣ تقترن بكل طريقة من طرق شغل المكان الأول .

ومنها عدد الطلاب الباقين بعد ذلك = ٢

إذاً عدد طرق شغل المكان الثالث = ٢ طريقة ، ويكون عدد الطلاب الباقين بعد ذلك = ١

إذاً عدد طرق شغل المكان الرابع = ١ طريقة

إذاً عدد طرق شغل الأماكن الأربعة معاً = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

حسب قاعدة التباديل :

كل طريقة من طرق شغل الأماكن الأربعة هي تباديل (ترتيب) لأربعة أشخاص مأخوذة كلها في كل مره .

حيث إن عدد تباديل ٤ أشياء مأخوذة أربعة في كل مرة = ^{٤}ل $_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

السؤال (٢٦) : ما عدد الكلمات التي يمكن تكوينها بأخذ أربعة حروف مختلفة من حروف كلمة " تباديل " ؟

(أ) ٢٤٠	(ب) ١٥
(جـ) ٣٦٠	(د) ١٢٠

الحل :

كلمة تباديل تحتوي على ٦ حروف مختلفة

إذاً عدد الكلمات التي يمكن تكوينها = ^{٦}ل $_{٤}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ كلمة

السؤال (٢٧) : أوجد عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ٦ كتب على أحد الرفوف ؟

(أ) ٦	(ب) ٦١٠
(جـ) ٣٦٠	(د) ٧٢٠

الحل :

كل طريقة من طرق شغل الأماكن الستة هي تبديل (ترتيب) لستة كتب مأخوذة كلها في كل مرة . ^{٦}ل $_{٦}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠

شرح :

يمكن شغل المكان الأول بكتاب من الكتب الستة أي بطرق عددها = ٦ ويتبقى لدي ٥ كتب .

عدد طرق شغل المكان الثاني بطرق عددها = ٥ ، ويتبقى لدي ٤ كتب

عدد طرق شغل المكان الثالث بطرق عددها = ٤ ، ويتبقى لدي ٣ كتب

عدد طرق شغل المكان الرابع بطرق عددها = ٣ ، ويتبقى لدي كتابين

عدد طرق شغل المكان الخامس بطرق عددها = ٢ ويتبقى لدي كتاب واحد

عدد طرق شغل المكان السادس بطرق عددها = ١

السؤال (٢٨) : بكم طريقة يمكن أن يجلس ٥ أشخاص في صف به ٩ كراسي ؟

(أ) ١٢٦	(ب) ١٥١٢٠
(جـ) ١٢٠٩٦	(د) ٦٠٤٨٠

الحل :

$^{٩}ل_{٥}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ = ١٥١٢٠ طريقة

الشرح :

يمكن شغل المكان الأول بواحد من الأشخاص الخمسة أي بطرق عددها = ٩

يتبقى لدي ٤ أشخاص

يمكن شغل المكان الثاني بواحد من الأشخاص الأربعة أي بطرق عددها = ٨

يتبقى لدي ٣ أشخاص

يمكن شغل المكان الثالث بواحد من الأشخاص الثلاثة أي بطرق عددها = ٧

يتبقى لدي شخصين

يمكن شغل المكان الرابع بواحد من الشخصين أي بطرق عددها = ٦

يتبقى لدي شخص واحد

يمكن شغل المكان الخامس بشخص واحد أي بطرق عددها = ٥

السؤال (٢٩) : بكم طريقة يمكن وضع ٨ شمعات ذات ألوان مختلفة في شمعدان يتسع لثلاث شمعات فقط ؟

(أ) ٥٦	(ب) ٢٤
(جـ) ٣٣٦	(د) ٥١٢

الحل :

عدد الطرق الممكنة = عدد تباديل (ترتيب) ٨ شمعات مأخوذة ٣ في كل مرة

عدد الطرق الممكنة = $^{٨}ل_{٣}$ = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦ طريقة

الشرح :

يمكن شغل المكان الأول بواحدة من الشمعات الـ ٨ بطرق عددها = ٨

يتبقى لدي ٧ شمعات

يمكن شغل المكان الثاني بواحدة من الشمعات الـ ٧ بطرق عددها = ٧

يتبقى لدي ٦ شمعات

يمكن شغل المكان الثالث والأخير بواحدة من الشمعات الـ ٦ بطرق عددها = ٦

يتبقى لدي ٥ شمعات

نكتفي هنا لأن الشمعدان يتسع لثلاث شمعات فقط ..

عدد الطرق = ٨ × ٧ × ٦ = ٣٣٦ طريقة

السؤال (٣٠) : كم كلمة مكونة من أربعة حروف مختلفة يمكن تكوينها باستخدام الحروف :

أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و

(أ) ٢٤	(ب) ٣٦٠
(جـ) ١٥	(د) ١٢٠

الحل :

نتخيل الكلمة مكونة من أربعة أحرف (خانات)

عدد طرق ملء الخانة الأولى = ٦

يتبقى لدينا ٥ أحرف

عدد طرق ملء الخانة الثانية = ٥

يتبقى لدينا ٤ أحرف

عدد طرق ملء الخانة الثالثة = ٤

يتبقى لدينا ٣ أحرف

عدد طرق ملء الخانة الرابعة = ٣

يتبقى لدينا حرفين

إذاً عدد الكلمات الممكن تكوينها = ^{٦}ل ٤ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠

السؤال (٣١) : يراد صنع لوحات معدنية تحمل كل منها أربعة حروف مختلفة من حروف الهجاء العربية ، كم لوحة معدنية يمكن صنعها ؟

(أ) ٢٠٤٧٥	(ب) ٢٥٤٨٠٠
(جـ) ٤٩١٤٠٠	(د) ١٢٢٨٥٠

الحل :

نتخيل شكل اللوحة المعدنية

عدد حروف الهجاء في اللغة العربية = ٢٨ حرف

عدد طرق اختيار الحرف الأول في المربع الأول = ٢٨

يتبقى لدينا ٢٧ حرف

عدد طرق اختيار الحرف الثاني في المربع الثاني = ٢٧

يتبقى لدينا ٢٦ حرف

عدد طرق اختيار الحرف الثالث في المربع الثالث = ٢٦

يتبقى لدينا ٢٥ حرف

عدد طرق اختيار الحرف الرابع في المربع الرابع = ٢٥

يتبقى لدينا ٢٤ حرف

عدد اللوح المعدنية = ^{٢٨}ل$_{٤}$ = ٢٨ × ٢٧ × ٢٦ × ٢٥ = ٤٩١٤٠٠

السؤال (٣٢) : إذا أراد أربعة أشخاص أخذ صورة جماعية بوقوفهم معاً في صف واحد . بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصطف هؤلاء الأشخاص ؟

(أ) ٤	(ب) ٢١
(جـ) ١٠	(د) ٢٤

الحل :

الطرق المختلفة لاصطفاف الأشخاص هي التباديل (التراتيب) المختلفة لمجموعة مكونه من أربعة عناصر أي ^{٤}ل$_{٤}$ ، لإيجاد ^{٤}ل$_{٤}$ يمكننا تصور المواقع الأربعة التي يقف بها الأشخاص الأربعة هكذا :

الموقع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
عدد الطرق	٤	٣	٢	١

يمكننا أشغال الموقع الأول بـ ٤ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثاني بـ ٣ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثالث بـ طريقتين

يمكننا أشغال الموقع الرابع بـ طريقة واحدة

عدد جميع الطرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة

أي أن : $^{٤}ل_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

السؤال (٣٣) : بكم طريقة يمكن أخذ صورة تذكارية لعائلة مكونه من أب وَ أم وثلاثة أطفال يقفون معاً في صف واحد ؟

(أ) ٥	(ب) ١٢٠
(جـ) ٣٦٠	(د) ٢٤٠

الحل :

عدد أفراد العائلة ٥ ، إذاً بكم طريقة يمكن أخذ صورة تذكارية بحيث يقفون معاً في صف واحد

الموقع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
عدد الطرق	٥	٤	٣	٢	١

يمكننا أشغال الموقع الأول بـ ٥ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثاني بـ ٤ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثالث بـ ٣ طرق

يمكننا أشغال الموقع الرابع بـ طريقتين

يمكننا أشغال الموقع الخامس بـ طريقة واحدة

عدد جميع الطرق = $^{٥}ل_{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة

السؤال (٣٤) : بكم طريقة يمكن أن يجلس أربعة أولاد وثلاث بنات في صف ؟

(أ) ٧	(ب) ٥٠٤٠
(جـ) ٧٥٦٠	(د) ٣٣٦٠

الحل :

يمكننا القول : بكم طريقة يمكن جلوس الأشخاص السبعة معاً في صف واحد .

الموقع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع
عدد الطرق	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

يمكننا أشغال الموقع الأول بـ ٧ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثاني بـ ٦ طرق

يمكننا أشغال الموقع الثالث بـ ٥ طرق

يمكننا أشغال الموقع الرابع بـ ٤ طرق

يمكننا أشغال الموقع الخامس بـ ٣ طرق

يمكننا أشغال الموقع السادس بـ طريقتين

يمكننا أشغال الموقع السابع بـ طريقة واحدة

عدد جميع الطرق = ^{٧}ل $_{٧}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤٠

السؤال (٣٥) : خمسة أشخاص وزوجاتهم يريدون الجلوس على عشرة مقاعد مصفوفة بحيث يجلس الرجال متجاورين وتجلس النساء متجاورات . بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك ؟

(أ) ٢٨٨٠٠	(ب) ١٢٠
(جـ) ١٤٤٠٠	(د) ٢٨٤٠٠

الحل :

لتحقيق ذلك يمكن للرجال أن يشغلوا المقاعد الخمسة الأولى أو الخمسة الأخيرة ، ويشغل النساء المقاعد الخمسة الأخرى وذلك على النحو الآتي :

الرجال					النساء				
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

عدد الطرق التي يمكن أن يشغل الرجال بها مقاعدهم =

^{٥}ل $_{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠

النساء					الرجال				
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

وعدد الطرق التي يمكن أن تشغل النساء بها مقاعدهن =

^{٥}ل $_{٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢

إذاً عدد الطرق الكلية الممكنة = ٢ × ١٢٠ × ١٢٠

عدد الطرق الكلية الممكنة = ٢٨٨٠٠

السؤال (٣٦) : لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ أوجد كم عدداً من ٤ أرقام يمكن تكوينها من الأرقام السابقة دون تكرار ؟

(أ) ٨٤٠	(ب) ٤٨٠
(جـ) ٨٢٠	(د) ٤٢٠

الحل :

عدد الأعداد = ^{٧}ل $_{٤}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠ عدداً

السؤال (٣٧) : لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ أوجد كم عدداً رقم آحاده ٤ ويتكون من خمس أرقام يمكن تكوينه من الأرقام السابقة دون تكرار ؟

(أ) ٢٥٢٠	(ب) ٣٦٠
(جـ) ٤٢٠	(د) ٢٤٠

الحل :

بما إن رقم الآحاد = ٤

إذاً نختار رقم الآحاد بطريقة واحدة

ونختار رقم العشرات بطرق عددها = ٦

ونختار رقم المئات بطرق عددها = ٥

ونختار رقم الألوف بطرق عددها = ٤

ونختار رقم عشرات الألوف بطرق عددها = ٣

إذاً عدد الأعداد = ١ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ عدداً

السؤال (٣٨) : لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ أوجد كم عدداً فردياً يمكن تكوينه باستخدام كل الأرقام السابقة دون تكرار ؟

(أ) ٢١٦٠	(ب) ٢٨٨٠
(جـ) ١٤٤٠	(د) ٣٦٠٠

الحل :

الأعداد الفردية هي التي رقم آحادها = ١ أو ٣ أو ٥ أو ٧

أي نختار رقم الآحاد بطرق عددها = ٤

إذاً عدد الأعداد = ٤ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٨٨٠ عدداً

السؤال (٣٩) : لدينا الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ أوجد كم عدداً أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام يمكن تكوينه من الأرقام السابقة دون تكرار ؟

(أ) ٢١٠	(ب) ٧٢
(جـ) ٣٥	(د) ١٢٠

الحل :

الأعداد الأكبر من ٤٠٠ وتتكون من ٣ أرقام يكون رقم المئات فيها ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧

إذاً نختار رقم المئات بطرق عددها ٤

ونختار رقم العشرات بطرق عددها ٦

ونختار رقم الآحاد بطرق عددها ٥

إذاً عدد الأعداد = ٤ × ٦ × ٥ = ١٢٠ عدداً

السؤال (٤٠) : كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ إذا كان كل عدد يتألف من ٥ أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢

أ) ١٨٠٠	(ب) ١٠٨٠
(جـ) ٢٥٢٠	(د) ٢٢٥٠

الحل :

ذكر في صيغة السؤال جملة : يتألف من ٥ أرقام مختلفة ، إذاً عدد الخانات ٥

الأعداد التي تقبل القسمة على ٢ = ٤ أو ٦ أو ٨

أي نختار رقم الآحاد بطرق عددها = ٣

ونختار رقم العشرات بطرق عددها = ٦

ونختار رقم المئات بطرق عددها = ٥

ونختار رقم الألوف بطرق عددها = ٤

ونختار رقم عشرات الألوف بطرق عددها = ٣

إذاً عدد الأعداد = ٣ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ١٠٨٠ عدداً

)(التوافيق)(

عرفنا أن التباديل هي اختيارات مرتبة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذة كلها أو بعضها في كل مرة ، وفي بعض الأحيان نحتاج إلى إجراء اختيار دون ترتيب كما يحصل مثلاً عند تشكيل لجنة خماسية من الطلبة يتم اختيارهم من بين ٣٠ طالباً أو تكوين مجموعة جزئية مكونة من ٣ عناصر مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها ٥ عناصر أو .... الخ . فهذه حالات لا يكون الترتيب فيها ذا أهمية .

مثال (١) : بكم طريقة يمكن اختيار ٣ كتب من بين خمسة كتب هي : علوم ، رياضيات ، تكنولوجيا ، إدارة ، تاريخ ؟

الحل :

جميع الاختيارات الممكنة هي :

{ علوم ، رياضيات ، تكنولوجيا } ، { علوم ، رياضيات ، إدارة } ، { علوم ، رياضيات ، تاريخ } ، { علوم ، تكنولوجيا ، إدارة } ، { علوم ، تكنولوجيا ، تاريخ } ، { علوم ، إدارة ، تاريخ } ، { رياضيات ، تكنولوجيا ، إدارة } ، { رياضيات ، إدارة ، تاريخ } ، { رياضيات ، تكنولوجيا ، تاريخ } ، { تكنولوجيا ، إدارة ، تاريخ }

عدد الاختيارات = ١٠

يسمى كل اختيار من هذه الاختيارات توفيقاً .

لاحظ أن الترتيب في كل اختيار غير مهم فالاختيار { علوم ، رياضيات ، تكنولوجيا } هو نفسه { رياضيات ، علوم ، تكنولوجيا } ، هو نفسه { تكنولوجيا ، رياضيات ، علوم }

مثال (٢) : إذا كانت س = { أ ، ب ، جـ } فلإيجاد عدد المجموعات الجزئية التي تشتمل كل منها على عنصرين نقول :

حيث إن عدد عناصر س = ٣

إذاً سوف نختار مجموعات جزئية ذات عنصرين من مجموعة تحوي ٣ عناصر . وتكون هذه المجموعات الجزئية هي : { أ ، ب } ، { أ ، جـ } ، { ب ، جـ }

إذاً عدد المجموعات الجزئية = ٣

عدد طرق الاختيار في هذه الحالة = ٣ ولا يوجد غيرها .

وطرق الاختيار هذه تُسمى توافيق . وكل منها يُسمى توفيقه .

وعلى هذا يكون لدينا ٣ توافيق وهي { أ ، ب } ، { أ ، جـ } ، { ب ، جـ }

ملاحظة :

الفرق الرئيسي بين التباديل والتوافيق هو الترتيب . إذ إن التباديل أساسها الترتيب . بينما في التوافيق ليس للترتيب أي اعتبار.

فمثلاً (أ ، ب) ، (ب ، أ) تبديلتان مختلفتان بينما { أ ، ب } ، { ب ، أ } توفيقه واحدة .

رمز التوافيق وكيفية حسابها :

يرمز لعدد توافيق ٣ أشياء مأخوذة اثنين اثنين بالرمز $\binom{٣}{٢}$ وتقرأ ثلاث فوق اثنين .

$$\binom{٣}{٢} = \frac{٣ \times ٢}{٢ \times ١} = ٣$$

تعريف :

عدد المجموعات الجزئية المختلفة التي تتكون كل منها من ر عنصراً مأخوذة من مجموعة بها ن عنصراً دون اعتبار للترتيب تُسمى عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة راء راء .

ويكون عدد التوافيق في هذه الحالة = $\binom{ن}{ر}$ ويقرأ ن فوق ر ، ر ≤ ن

السؤال (٤١) : أرادت النوادي الأربعة (الهلال ، الاتحاد ، الشباب ، النصر) إقامة مباريات في كرة القدم فيما بينها بحيث تلعب هذه النوادي مثنى مثنى . فبكم طريقة يمكن إتمام ذلك ؟

(أ) ١٢	(ب) ٤
(جـ) ٨	(د) ٦

الحل :

هذا يعني أن لدينا مجموعة بها ٤ عناصر . ويراد إيجاد عدد المجموعات الجزئية ذات العنصرين لهذه المجموعة .

وتكون هذه المجموعات هي : { الهلال ، الاتحاد } ، { الهلال ، الشباب } ، { الهلال ، النصر } ، { الاتحاد ، الشباب } ، { الاتحاد ، النصر } ، { الشباب ، النصر } .

عدد المجموعات الجزئية = ٦ ، إذاً عدد طرق الاختيار (التوافيق) = ٦

إذاً $\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

السؤال (٤٢) : لنعتبر الحروف أ ، ب ، جـ ، د ونوجد عدد التوافيق الناتجة من أخذ ٣ حروف منها في كل مرة . وكذلك عدد التباديل الناتجة من أخذ ٣ حروف في كل مرة ؟

(أ) ١٢	(ب) ٢٤
(جـ) ٦	(د) ١٨

الحل :

{ أ ، ب ، جـ } ، { أ ، ب ، د } ، { أ ، جـ ، د } ، { ب ، جـ ، د }

يوجد لدينا ٤ حروف . والترتيب غير مهم .

إذاً عدد التوافيق = $\binom{٤}{٣}$ = $\frac{٤ \times ٣ \times ٢}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٤

إذا تم مراعاة الترتيب .. نوجد التباديل = $^{٤}ل_{٣}$ = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

السؤال (٤٣) : مدرسة فيها ١٥ معلماً ، يراد تشكيل لجنة مكونة من ٤ معلمين . بكم طريقة يتم ذلك ؟

(أ) ٤٥٥	(ب) ١٣٦٥
(جـ) ٦٠	(د) ٢٧٣٠

الحل :

نلاحظ هنا اختيارنا للمعلمين غير مرتبة

عدد طرق تشكيل اللجنة = $\binom{١٥}{٤}$ = $\frac{١٥ \times ١٤ \times ١٣ \times ١٢}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$ = ١٣٦٥ طريقة

السؤال (٤٤) : التقى ٤ أصدقاء فصافح كل منهم الآخر ، كم مصافحة تمت بين الأصدقاء ؟

(أ) ١٠	(ب) ٦
(جـ) ٨	(د) ٤

الحل :

إذا رمزنا للأصدقاء الأربعة بالرموز أ ، ب ، جـ ، د فإن المصافحات بين كل اثنين تمثلها المجموعات الجزئية التالية : { أ ، ب } ، { أ ، جـ } ، { أ ، د } ، { ب ، جـ } ، { ب ، د } ، { جـ ، د } وهذه ٦ مجموعات .

عدد المصافحات = $\binom{٤}{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦ مصافحات

السؤال (٤٥) : بكم طريقة يمكن اختيار فريق كرة السلة المكون من خمسة لاعبين من بين ١٠ طلاب متميزين في لعبة كرة السلة ؟

(أ) ٥٠٤٠	(ب) ٢٥٢
(جـ) ٥٠	(د) ٢١٠

الحل :

الترتيب غير مهم .

عدد الطرق = $\binom{10}{5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$

السؤال (٤٦) : صف مختلط فيه ١٠ طالبات ، ٧ طلاب . يراد اختيار لجنة علمية مكونة من ٣ طالبات وطالبين . بكم طريقة يتم ذلك ؟

(أ) ٣٠	(ب) ٧٢٠
(جـ) ١٢٠	(د) ٢٢

الحل :

الترتيب غير مهم .. نريد ٣ طالبات من بين ١٠ طالبات ولم يشترط الترتيب وبالمثل طالبين من بين ٧ طلاب .

عدد طرق اختيار الطالبات = $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ طريقة

عدد طرق اختيار الطلاب = $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ طريقة

إذاً عدد طرق اختيار اللجنة كاملة = $\binom{10}{3} \times \binom{7}{2} = 120 \times 21 = 2520$ طريقة

السؤال (٤٧) : من بين ٦ مدرسين لمادة الرياضيات ، ١٠ طلاب متميزين في مادة الرياضيات يراد اختيار ٣ مدرسين ، ٤ طلاب لتكوين جمعية الرياضيات بالمدرسة . بكم طريقة يمكن تشكيل جمعية الرياضيات ؟

(أ) ٤٢٠٠	(ب) ١٤٠٠
(جـ) ١١٢	(د) ٤٢٠

الحل :

من كلمة من بين يفهم أن الترتيب غير مهم ..

تمثيل المدرسين يتم بطرق عددها = $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

تمثيل الطلاب يتم بطرق عددها = $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

إذاً عدد الطرق الممكنة لتشكيل جمعية الرياضيات = ٢٠ × ٢١٠ = ٤٢٠٠

السؤال (٤٨) : بكم طريقة يمكن اختيار ١٠ عمال للتعيين في أحد المصانع من بين ١٢ متقدماً للعمل في هذا المصنع ؟

(أ) ١٣٢	(ب) ٦٦
(جـ) ١٢٠	(د) ٣٢

الحل :

اختيار ١٠ عمال من بين ١٢ يتم بطرق عددها = $\binom{12}{10} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 66$

السؤال (٤٩) : بكم طريقة يمكن اختيار ١٠ عمال للتعيين في أحد المصانع من بين ١٢ متقدماً للعمل في هذا المصنع . إذا توجب اختيار شخص معين من المتقدمين ؟

(أ) ٩٩	(ب) ٦٦
(جـ) ٨٨	(د) ٥٥

الحل :

من جملة توجب اختيار شخص معين ، إذاً في شخص تم تعينه (عنده واسطة ☺)

فإننا نحتاج اختيار ٩ أشخاص من بين ١١ متقدم للعمل في المصنع .

$\binom{11}{9} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 55$

السؤال (٥٠) : بكم طريقة يمكن اختيار ١٠ عمال للتعيين في أحد المصانع من بين ١٢ متقدماً للعمل في هذا المصنع . إذا توجب عدم اختيار شخص معين من المتقدمين ؟

(أ) ١١	(ب) ١٢
(جـ) ٢٢	(د) ١٠

الحل :

من جملة توجب عدم اختيار شخص معين ، إذاً في شخص لا يتم تعينه (غضبانين عليه ☺)

فإننا نكون في حاجة إلى اختيار ١٠ أشخاص من بين المتقدمين الباقين وعددهم ١١

$\binom{١١}{١٠} = \frac{١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢}{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١١$

السؤال (٥١) : بكم طريقة يمكن تقسيم ١٨ طالباً إلى ثلاث مجموعات مكونه من ٥ ، ٦ ، ٧ طلاب ؟

(أ) ٨٥٦٨ × ١٧١٦ × ١	(ب) ٣٠٦٠ × ١٢٨٧ × ١
(جـ) ٨٥٦٨ × ١٢٨٧ × ١	(د) ٣٠٦٠ × ١٧١٦ × ١

الحل :

اختيار المجموعة الأولى يتم من خلال اختيار ٥ طلاب من بين ١٨ طالب :

$\binom{١٨}{٥} = \frac{١٨ \times ١٧ \times ١٦ \times ١٥ \times ١٤}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٨٥٦٨$

اختيار المجموعة الثانية يتم من خلال اختيار ٦ طلاب من بين الطلاب الباقين وعددهم ١٣ :

$\binom{١٣}{٦} = \frac{١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨}{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٧١٦$

اختيار المجموعة الثالثة يتم من خلال اختيار ٧ طلاب من بين الطلاب الباقين وعددهم ٧ :

$\binom{٧}{٧} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١$

وباستخدام مبدأ العد ، عدد الطرق الممكنة للتقسيم المطلوب يساوي :

$\binom{١٨}{٥}\binom{١٣}{٦}\binom{٧}{٧} = ٨٥٦٨ \times ١٧١٦ \times ١$

السؤال (٥٢) : أوجد عدد طرق تشكيل لجنة فرعية من ٤ أشخاص من بين لجنة عامة مكونة من ١٢ عضواً ؟

(أ) ٤٨	(ب) ١١٨٨٠
(جـ) ٤٩٥	(د) ٧٩٢

الحل :

اختيار ٤ أشخاص من بين ١٢ عضو (الترتيب غير مهم) = $\binom{١٢}{٤} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٤٩٥$

السؤال (٥٣) : أوجد عدد طرق اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها في امتحان ما يشتمل على ٦ أسئلة إذا علم أن السؤال الأول إجباري .

(أ) ٥	(ب) ١
(جـ) ٣٠	(د) ٦

الحل :

إننا نحتاج اختيار ٥ أسئلة من ضمن ٥ أسئلة لأن السؤال الأول إجباري = $\binom{٥}{٥}$ = ١

الشرح : قال السؤال الأول إجباري إذاً ما يدخل ضمن الاختيار.

بقيت لنا ٥ أسئلة ما راح تفرق لو اخترناها بأي ترتيب وبالتالي تكون عدد طرق اختيارها = $\binom{٥}{٥}$ = ١

من مبدأ العد عدد الطرق = ١ × ١ = ١

السؤال (٥٤) : جمعية تعاونية تضم ٧ رجال ، ٥ نساء ويراد تكوين لجان تشمل كل لجنة ٣ رجال وسيدتين . فكم يكون عدد هذه اللجان ؟

(أ) ٦٤٠	(ب) ٣٥٠
(جـ) ٧٥٠	(د) ٥٤٠

الحل :

طريقة تكوين أي لجنة تكون نتيجة عمليتين متتاليتين :

أولاً : اختيار ٣ رجال من بين ٧ رجال

إذاً عدد الطرق = عدد توافيق ٧ رجال مأخوذة ٣ في كل مرة = $\binom{٧}{٣}$

ثانياً : اختيار سيدتين من بين ٥ سيدات

إذاً عدد الطرق = عدد توافيق ٥ سيدات مأخوذة سيدتين في كل مره = $\binom{٥}{٢}$

ثالثاً : عدد طرق تكوين اللجان (المكونة من ٣ رجال وسيدتين) =

عدد طرق العملية الأولى × عدد طرق العملية الثانية = $\binom{٧}{٣}$ × $\binom{٥}{٢}$ = ٣٥٠ طريقة

السؤال (٥٥) : يوجد في مكتبة ١٠ كتب مختلفة في الرياضيات وَ ٧ كتب مختلفة في الفيزياء ، بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب منها مكونة من ٤ كتب رياضيات وَ كتابين في الفيزياء على رف المكتبة ؟

(أ) ٣١٧٥٢٠٠	(ب) ٤٤١٠
(جـ) ٣٥٢٨٠	(د) ٦١٧٤٠

الحل :

إن هذا الوضع يتم بإجراء ثلاث خطوات ، هي اختيار كتب الرياضيات ، اختيار كتب الفيزياء وترتيب الكتب المختارة .

عدد طرق اختيار كتب الرياضيات = $\binom{١٠}{٤}$

عدد طرق اختيار كتب الفيزياء = $\binom{٧}{٢}$

عدد طرق ترتيب الكتب الستة على الرف = $ل^{٦}_{٦}$

فيكون عدد الترتيبات المختلفة = $\binom{١٠}{٤} \times \binom{٧}{٢} \times ل^{٦}_{٦}$ = ٣١٧٥٢٠٠ طريقة

السؤال (٥٦) : بكم طريقة يمكنك اختيار ٥ أسئلة للإجابة عنها في امتحان لمادة الرياضيات أشتمل على ٦ أسئلة ؟

(أ) ٣٠	(ب) ١٥
(جـ) ٥	(د) ٦

الحل :

عدد الطرق = $\binom{٦}{٥} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢}{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٦$

السؤال (٥٧) : بكم طريقة يمكن اختيار ٤ ألوان من مجموعة مكونه من ٦ ألوان ؟

(أ) ٣٠	(ب) ١٥
(جـ) ٥	(د) ٦

الحل :

عدد الطرق = $\binom{٦}{٤} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ١٥$

السؤال (٥٨) : إذا كانت س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فأوجد عدد المجموعات الجزئية التي يحتوي كل منها على عنصر واحد ويمكن تكوينها من المجموعة س .

(أ) ٤	(ب) ١
(جـ) ٥	(د) ٦

الحل :

المجموعات الجزئية من س والتي تحتوي كل منها على عنصر واحد فقط هي :

{ ٣ } ، { ٤ } ، { ٥ } ، { ٦ } وعددها ٤

$\binom{٤}{١} = ٤$

السؤال (٥٩) : إذا كانت س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فأوجد عدد المجموعات الجزئية التي يحتوي كل منها على عنصرين ويمكن تكوينها من المجموعة س .

(أ) ٤	(ب) ١
(جـ) ٥	(د) ٦

الحل :

المجموعات الجزئية من س والتي تحتوي كل منها على عنصرين فقط هي :

{ ٣ ، ٤ } ، { ٣ ، ٥ } ، { ٣ ، ٦ } ، { ٤ ، ٥ } ، { ٤ ، ٦ } ، { ٥ ، ٦ } وعددها ٦

$\binom{٤}{٢} = ٦$

السؤال (٦٠) : إذا كانت س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فأوجد عدد المجموعات الجزئية التي يحتوي كل منها على ثلاثة عناصر ويمكن تكوينها من المجموعة س .

(أ) ٤	(ب) ١
(جـ) ٥	(د) ٦

الحل :

المجموعات الجزئية من س والتي تحتوي كل منها على ثلاثة عناصر هي :

{ ٣ ، ٤ ، ٥ } ، { ٣ ، ٤ ، ٦ } ، { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، { ٤ ، ٥ ، ٦ } وعددها ٤

$\binom{٤}{٣} = ٤$

- اختبار -

تدريب (١) : عدد طرق اختيار مدير ونائب له لإحدى الشركات من بين ٨ مرشحين يساوي :

(أ) $\binom{٨}{٢}$	(ب) $^{٨}ل_{٢}$
(جـ) ٨ × ٢	(د) ٥٦

تدريب (٢) : عدد طرق اختيار ٥ كتب من ٨ كتب مختلفة يساوي :

(أ) $\binom{٨}{٥}$	(ب) $^{٨}ل_{٥}$
(جـ) ٨ × ٥	(د) ٥٦

تدريب (٣) : عدد طرق اختيار ٤ طلاب من بين ١٠ طلاب بحيث يشمل الاختيار طالباً معيناً يساوي :

(أ) $\binom{١٠}{٤}$	(ب) $^{١٠}ل_{٥}$
(جـ) $\binom{٩}{٣}$	(د) ٤٠

تدريب (٤) : يصدر مكتب تراخيص السيارات لوحات مكونة من حروف وأرقام كما في الشكل أدناه بحيث تكون الحروف هي حروف اللغة العربية (٢٨ حرفاً) والأرقام هي أرقام النظام العشري(١٠ أرقام) . كم لوحة ترخيص يمكن أن يصدرها المكتب بحيث تكون اللوحة الواحدة مكونه من حرفين وثلاثة أرقام علماً بأن الحروف والأرقام يمكن أن تتكرر؟

(أ) ٧٥٦٠٠٠	(ب) ٧٨٤٠٠٠
(جـ) ٥٦٤٤٨٠	(د) ٥٤٤٣٢٠

حرف	حرف	رقم	رقم	رقم

تدريب (٥) : كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ١} ليكون العدد أقل من ٥٠٠ ويسمح بتكرار الأرقام في العدد الواحد .

(أ) ١٠٨	(ب) ١٤٤
(جـ) ٧٢	(د) ٢٠

- الإجابة -

تدريب (١) : عدد طرق اختيار مدير ونائب له لإحدى الشركات من بين ٨ مرشحين يساوي :

(أ) $\binom{٨}{٢}$	(ب) $^{٨}ل_{٢}$
(جـ) ٨ × ٢	(د) ٥٦

تدريب (٢) : عدد طرق اختيار ٥ كتب من ٨ كتب مختلفة يساوي :

(أ) $\binom{٨}{٥}$	(ب) $^{٨}ل_{٥}$
(جـ) ٨ × ٥	(د) ٥٦

تدريب (٣) : عدد طرق اختيار ٤ طلاب من بين ١٠ طلاب بحيث يشمل الاختيار طالباً معيناً يساوي :

(أ) $\binom{١٠}{٤}$	(ب) $^{١٠}ل_{٥}$
(جـ) $\binom{٩}{٣}$	(د) ٤٠

تدريب (٤) : يصدر مكتب تراخيص السيارات لوحات مكونة من حروف وأرقام كما في الشكل أدناه بحيث تكون الحروف هي حروف اللغة العربية (٢٨ حرفاً) والأرقام هي أرقام النظام العشري(١٠ أرقام) . كم لوحة ترخيص يمكن أن يصدرها المكتب بحيث تكون اللوحة الواحدة مكونه من حرفين وثلاثة أرقام علماً بأن الحروف والأرقام يمكن أن تتكرر ؟

(أ) ٧٥٦٠٠٠	(ب) ٧٨٤٠٠٠
(جـ) ٥٦٤٤٨٠	(د) ٥٤٤٣٢٠

الحل :

حرف	حرف	رقم	رقم	رقم

نلاحظ تم ذكر بأن الحروف والأرقام يمكن أن تتكرر.

يملأ الفراغ الأول بأحد الحروف الهجائية وعددها = ٢٨

يملأ الفراغ الثاني بأحد الحروف الهجائية وعددها = ٢٨

يملأ الفراغ الثالث بأحد أرقام النظام العشري وعددها = ١٠

يملأ الفراغ الرابع بأحد أرقام النظام العشري وعددها = ١٠

يملأ الفراغ الخامس بأحد أرقام النظام العشري وعددها = ١٠

ويكون عدد اللوحات التي يمكن صنعها في هذه الحالة = ٢٨ × ٢٨ × ١٠ × ١٠ × ١٠ = ٧٨٤٠٠٠

تدريب (٥) : كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ١} ليكون العدد أقل من ٥٠٠ ويسمح بتكرار الأرقام في العدد الواحد .

(أ) ١٠٨	(ب) ١٤٤
(جـ) ٧٢	(د) ٢٠

الحل :

حتى يكون العدد أقل من ٥٠٠ يجب أن تكون خانة المئات أقل من ٥

وبذلك يكون عدد الاختيارات الممكنة لخانة المئات = ٣

وبما أن التكرار مسموح به فإن عدد الاختيارات لكل من خانة العشرات وخانة الآحاد يساوي ٦

إذاً عدد الأعداد المطلوبة = ٣ × ٦ × ٦ = ١٠٨ عدداً