اختبار منتصف الفصل

الدروس من 2-1 إلى 2-3

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 2-1)

(1 $f(x) = 3(4)^x$

(2 $f(x) = -(2)^x + 5$

(3 $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

(4 $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

(5 **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه، مقربًا الناتج إلى أقرب 4 منازل عشرية.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات ؟

(6 **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 125)$, $(3, 1000)$ ؟ (الدرس 2-1)

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

(7 **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 2005 م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2017 م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 2005 م، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2025 م.

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

(8 $11^{2x+1} = 121^{3x}$

(9 $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

(10 $5^{2x+3} \leq 125$

(11 $16^{2x+3} < 64$

(12 $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \geq 16^{3x}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-3)

(13 $f(x) = 3\log_2(x-1)$

(14 $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

(15 $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

(16 **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$ ؟ (الدرس 2-3)

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

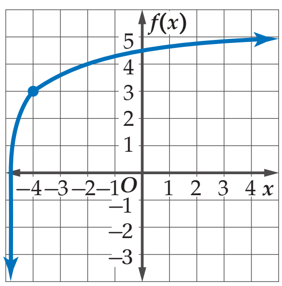
B $\log_5 625 = 4$

C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

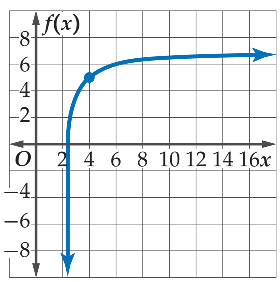
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

(17 **اختيار من متعدد:** أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 2-3)

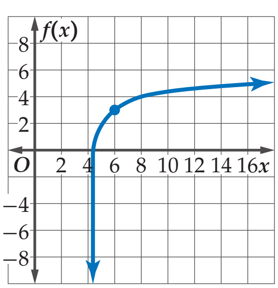
A



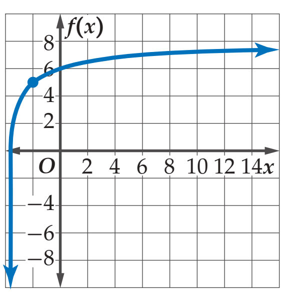
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

(18 $\log_4 32$

(19 $\log_5 5^{12}$

(20 $\log_{16} 4$

(21 اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 2-3)

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-4 خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية. (الدرس 3–2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
الخل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

لماذا؟

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي.

لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$\text{pH}_{\text{القهوة}} - \text{pH}_{\text{الماء النقي}} = -\log_{10}[H^+]_{\text{القهوة}} + \log_{10}[H^+]_{\text{الماء النقي}}$ والتي تكتب بالشكل :

$\text{pH}_{\text{الماء النقي}} - \text{pH}_{\text{القهوة}} = \log_{10}\dfrac{(H^+)_{\text{القهوة}}}{(H^+)_{\text{الماء النقي}}}$، وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{القهوة}}}{(H^+)_{\text{الماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

التعبير اللفظي: إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x$, $n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوِّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوِّض عن m , n بالقيمتين $\log_b x$, $\log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

مثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$ — $192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$= \log_4 4^3 + \log_4 3$ — خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 3 + \log_4 3$ — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$ — $\log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$.

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.
افترض أن $b^m = x , b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m , \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$b^{m-n} = \frac{x}{y}$ — خاصية قسمة القوى

$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$ — خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$m - n = \log_b \frac{x}{y}$ — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$ — عوّض عن m , n بالقيمتين $\log_b x , \log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 (\frac{36}{5})$ — $7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

$= \log_6 6^2 - \log_6 5$ — خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= 2 - 0.8982$ — الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$= 1.1018$ — $\log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسِّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$	عوِّض $[H^+] = 10^{-4.2}$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$4.2 = 4.2$ ✓	

تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون .

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو .
والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي — خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة
يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $25 \approx 2^{4.6438}$.

مثال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 \qquad 5^2 = 25$$

$$= 2\log_2 5 \qquad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438 \qquad \log_2 5 = 2.3219$$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$، فقرّب قيمة $\log_3 49$.

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مثال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}} \qquad \sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$$

$$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}} \qquad 4^3 = 64$$

$$= \log_4 4^{\frac{3}{5}} \qquad \text{خاصية قوة القوة}$$

$$= \frac{3}{5}\log_4 4 \qquad \text{خاصية لوغاريتم القوة}$$

$$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5} \qquad \log_b b = 1$$

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$

5B) $\log_7 \sqrt[6]{49}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$ خاصية لوغاريتم القوة

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{3-2x} = (3-2x)^{\frac{1}{5}}$

$= \log_3 (x-1) - \frac{1}{5}\log_3 (3-2x)$

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

6C) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

تنبيه!

لوغاريتم المجموع

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات ، $\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$.

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$ بإنطاق المقام

b) $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2}, 2^6 = 64$

$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$

7B) $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

1) $\log_4 15$ 2) $\log_4 \frac{5}{3}$

3) $\log_4 \frac{3}{4}$ 4) $\log_4 0.6$

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610 , \log_4 3 \approx 0.7925 , \log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

5) $\log_4 30$ 6) $\log_4 20$

7) $\log_4 \frac{2}{3}$ 8) $\log_4 \frac{4}{3}$

9) $\log_4 9$ 10) $\log_4 8$

11) **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. (مثال 3)

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465 , \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$ ، $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

12) $\log_3 25$ 13) $\log_5 49$

14) $\log_6 48$ 15) $\log_7 81$

16) $\log_6 512$ 17) $\log_7 729$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (مثال 5)

18) $\log_5 \sqrt[4]{25}$ 19) $\log_2 \sqrt[5]{32}$

20) $3 \log_7 \sqrt[6]{49}$ 21) $4 \log_2 \sqrt{8}$

22) $50 \log_5 \sqrt{125}$ 23) $\log_3 \sqrt[6]{243}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 6)

24) $\log_9 6x^3y^5z$ 25) $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

26) $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$ 27) $\log_4 10t^2uv^{-3}$

28) $\log_5 a^6b^{-3}c^4$ 29) $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: (مثال 7)

30) $3 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 (6 - x)$

31) $5 \log_7 (2x) - \frac{1}{3} \log_7 (5x + 1)$

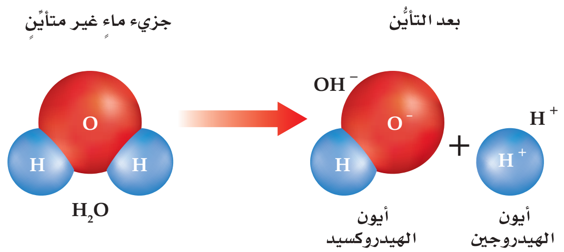
32) $7 \log_3 a + \log_3 b - 2 \log_3 (8c)$

33) $2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x - 5)$

34) $2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c$

35) $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$

36) **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log_{10} K_w$ بدلالة $\log_{10} [H^+]$ و $\log_{10} [OH^-]$.

b) بسِّط المعادلة في الفرع a إذا علمت أن قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم غير صحيحة:

37) $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$

38) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$

39) $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$

40) $\log_2 y^5 = 5 \log_2 y$

41) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$

42) $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$

43) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$

44) $\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z$

45) **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر. إذا علمت أن قوة الهزة M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963 م؟

46) استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطولة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة.

48) **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة.

49) **تحدٍ:** أوجد القيمة الدقيقة للعبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$

50) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك:

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

51) استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 18$

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًّا في كل مما يأتي (الدرس 1-2)

52) $f(x) = 2^x;\ g(x) = -2^x$

53) $f(x) = 5^x;\ g(x) = 5^{x+3}$

54) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

55) $\log_4 16^x$

56) $\log_3 27^x$

57) **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير، والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120\text{w}$، و $R = 3\Omega$. قرِّب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة)

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 7-1)

58) $f(x) = x + 73,\ g(x) = x - 73$

59) $g(x) = 7x - 11,\ h(x) = \frac{1}{7}x + 11$

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

60) $3^{4x} = 3^{3-x}$

61) $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$

62) $49^x = 7^{x^2-15}$

63) $\log_2 (x+6) = 5$

تدريب على اختبار

64) ما قيمة $2 \log_5 12 - \log_5 8 - 2 \log_5 3$؟

A $\log_5 2$

B $\log_5 0.5$

C $\log_5 3$

D 1

65) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$؟

A 3

B 2

C 1

D 0

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 4–2)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

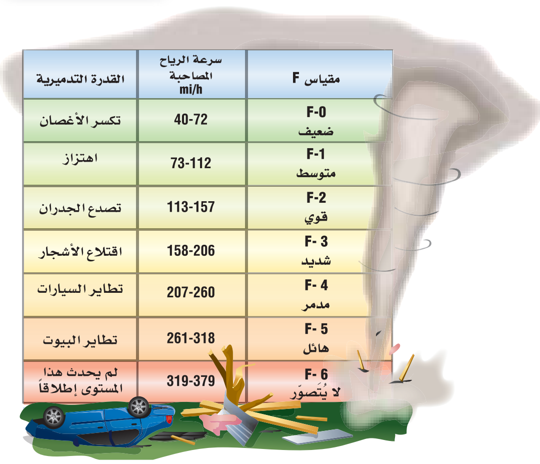
المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنِّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F–0 إلى F–6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وبحسب طول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.



مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتَصوّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$ المعادلة الأصلية

$x = 36^{\frac{3}{2}}$ تعريف اللوغاريتم

$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$ $36 = 6^2$

$x = 6^3 = 216$ خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ المعادلة الأصلية

$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ عوِّض 216 بدلًا من x

$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ حلّل

$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ خاصيتا ضرب اللوغاريتميات ولوغاريتم القوة

$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ بسّط

$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓ الحل صحيح

تحقق من فهمك

1A) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

1B) $\log_{16} x = \frac{5}{2}$

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x-4)(x+1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$

$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$

$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗

$x = 4$

$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$

$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$.

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

إرشادات للدراسة

التعويض
اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x-9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x-9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x-12)(x+3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ $x = 12$	حُل كل معادلة

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة
يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6 (x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًّا للمعادلة.

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x-9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12-9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

3B) $\log_6 x + \log_6 (x+5) = 2$

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي — خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

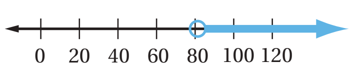
تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 4 — حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

أوجد مجموعة حلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$	المتباينة الأساسية
$x > 3^4$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x > 81$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \stackrel{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \stackrel{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

أوجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$

4B) $\log_2 x < 4$

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا.

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.

استثن من حلّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي   خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 5   حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

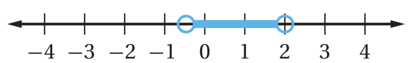
$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأساسية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ($x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



التحقق: عوّض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2}$ ، $2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$

18) $\log_8 x \leq -2$

19) $\log_6 x < -3$

20) $\log_4 x \geq 4$

21) $\log_3 x \geq -4$

22) $\log_2 x \leq -2$

أوجد مجموعة حلّ كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \leq \log_4 (4x - 3)$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$

26) $\log_7 (x + 2) \geq \log_7 (6x - 3)$

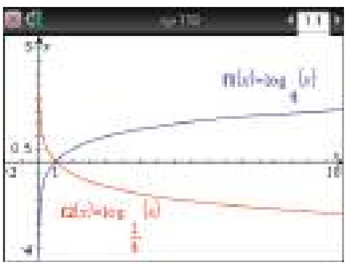
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R هي شدة الصوت. احسب شدة صوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل.

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية.

a) كم تبلغ شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر؟

b) كم مرة تبلغ شدة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بشدة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين الدالتين $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, $y = \log_4 x$.



a) **تحليليًّا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **تحليليًّا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = -1(\log_4 x)$ و $y = \log_4 x$ وما مجال ومدى كل منهما؟

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية.

b) ما سرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟

31) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1واط لكل متر مربع، وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع.

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة الصوت الذي مقداره 10^{-2} واط لكل متر مربع، فهل تضاعف عدد وحدات الديسبل بمقدار 100مرة ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟

لينا	ريم
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \leq 2^{-2}$	$x \geq 2^{-2}$
$0 < x \leq \frac{1}{4}$	$x \geq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة
$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$

34) **تبرير:** نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$ ، وضّح إجابتك.

35) **اكتب:** وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها.

36) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالاً على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل.

37) **تبرير:** ضع خطًّا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين $0, 1$ ، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين $0, 1$ وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من ، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) **اكتب:** فسِّر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ المحور x عند النقطة $(1, 0)$ ولا يقطع المحور y .

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $\log_4 256$

43) $\log_2 \frac{1}{8}$

44) $\log_6 216$

45) $\log_7 2401$

بسّط كلًّا مما يأتي، مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$

47) $(2p^2n)^3$

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-6 اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:

درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

والآن:

- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

المفردات:

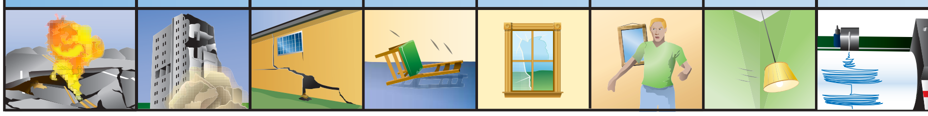
اللوغاريتم العشري
common logarithm

صيغة تغيير الأساس
Change of Base Formula

لماذا؟

يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.



يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x, x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًّا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

قراءة الرياضيات

اللوغاريتم العشري
عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: ENTER 5 LOG تجد أن:

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: ENTER 0.3 LOG تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تحقق من فهمك

1A) $\log 7$

1B) $\log 0.5$

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90–100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$	المعادلة الأصلية
$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$	$L = 66.6, m = 1$
$6.66 = \log I$	اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط
$I = 10^{6.66}$	الصورة الأسية
$I \approx 4570882$	استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

إرشادات للدراسة

وحدة الجول: تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج $= 4^{-7}$ جول

تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر.

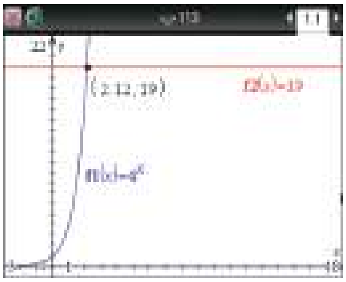
إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3 حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	اقسم كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.1240$	استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .



تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire.

مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6 تحليل الرسم البياني واختر منها 4 نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2.12, 19)$.

الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓

✓ تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$ **3B)** $6^x = 42$

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مـثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2) \log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$y < \dfrac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3 - \log 7$
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\dfrac{1}{59049} < \dfrac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

✓ تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ **4B)** $4^y < 5^{2y+1}$

إرشادات للدراسة

حل المتباينات

تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يعكس اتجاه رمز التباين.

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي — صيغة تغيير الأساس

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

← لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b

← لوغاريتم الأساس القديم للأساس b

مثال: $\log_3 11 = \dfrac{\log_5 11}{\log_5 3}$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي
هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (780م–848م) لُقِّب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.

مثال 5 — استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \dfrac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$	صيغة تغيير الاساس
≈ 2.7268	استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

مـثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. مستعملًا صيغة تغيير الأساس حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$	المعادلة الأصلية
$= \log_2 240$	$n = 240$
$= \dfrac{\log 240}{\log 2}$	صيغة تغيير الأساس
≈ 7.9	بسّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة.

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ **2)** $\log 21$ **3)** $\log 0.4$

4) $\log 3$ **5)** $\log 11$ **6)** $\log 3.2$

7) $\log 8.2$ **8)** $\log 0.9$ **9)** $\log 0.04$

10) علوم: ترتبط كمية الطاقة E المقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)

11) صوت: أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB، إذا علمت أن ارتفاع الصوت L بالديسبل يُعطى بالعلاقة $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حد من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. (مثال 2)

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت $m = 1$؟

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12) $6^x = 40$

13) $2.1^{a+2} = 8.25$

14) $7^{x^2} = 20.42$

15) $11^{b-3} = 5^b$

16) $8^x = 40$

17) $9^{b-1} = 7^b$

18) $15^{x^2} = 110$

19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 4)**

20) $5^{4n} > 33$

21) $6^{p-1} \leq 4^p$

22) $3^{y-1} \leq 4^y$

23) $5^{p-2} \geq 2^p$

24) $2^{4x} \leq 20$

25) $6^{3n} > 36$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: **(مثال 5)**

26) $\log_3 7$

27) $\log_2 16$

28) $\log_4 9$

29) $\log_3 21$

30) $\log_5 (2.7)^2$

31) $\log_7 \sqrt{5}$

32) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t عدد السنوات التي مرت منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. **(مثال 6)**

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًّا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًّا، فما عدد السنوات التي مرت منذ شرائها لأقرب سنة؟

33) **علوم البيئة:** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بـِ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون) ، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع الرقم الهيدروجيني لمادة الزرنيخ علمًا بأن قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\mathrm{pH} = -\log\,[\mathrm{H}^+]$ ؟

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها 3 L من ماء بئر، فهل هذا الماء صالح للشرب؟
(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1\ \mathrm{ppm} = 1\ \mathrm{mg/kg}$)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل الرقم الهيدروجيني $\mathrm{pH} = 9.5$ والذي يجعل الماء غير صالح للشرب؟

34) **هزات أرضية:** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة.

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم روك في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في ألاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟

35) **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وذلك بتغيير قيم x بمقدار 0.1 في كل مرة. وابحث عن قيمتين تقع بينهما قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول.

b) **بيانيًا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

c) **عدديًا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتا الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) اكتشف الخطأ: حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

بلال	خالد
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$3p \log 4 = \log 10$	$p \log 4 = \log 10$
$p = \dfrac{\log 10}{3 \log 4}$	$p = \dfrac{\log 10}{\log 4}$

37) تحدٍّ: حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة.

38) اكتب: منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري .

39) برهان: أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b, \log_b a$ ، وبرهن تخمينك.

40) اكتب: فسِّر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمِّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات.

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

41) $\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x$

42) $2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2$

43) $\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x$

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

44) $\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5)$

45) $\log_9 (9x + 4) \le \log_9 (11x - 12)$

46) افترض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 2-5)

A سنتان

B 5 سنوات

C 3 سنوات

D 8 سنوات

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3, g(x) = x - 5$؟

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثّل حلًّا للمعادلة $27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟

A -4

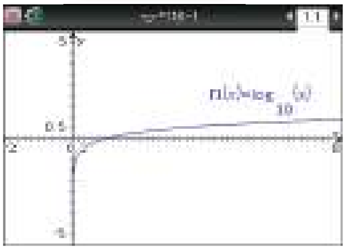
B -2

C 2

D 4

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inqualites



لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.

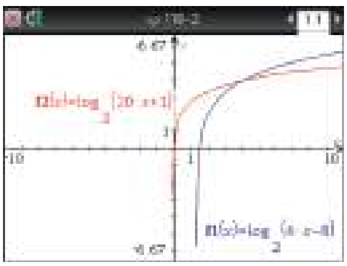
فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي على $y = \log_{10} x$ باعتباره أمرًا أساسيًّا.

اضغط على المفاتيح: enter x log (لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$،

ويمكن أيضًا تمثيل الدوال اللوغارتمية بأساسات لا تساوي عشرة من دون استعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك باستعمال أوامر مباشرة لكتابة الدالة اللوغاريتمية.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلة: $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.



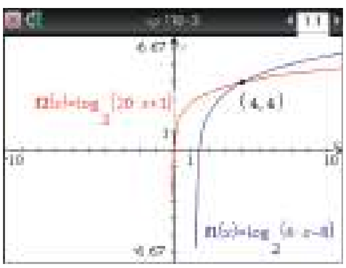
الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل كل طرف بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.

أدخل $\log_2 (6x - 8)$؛ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2 .

ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

enter $\log_3 (20x + 1)$ ctrl tab enter $\log_2 (6x - 8)$ ctrl

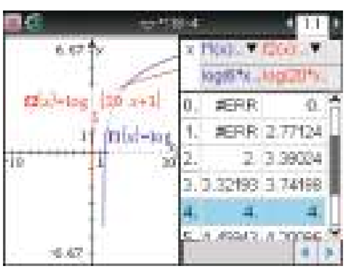


الخطوة 2: استعمال ميزة **نقاط التقاطع**

استعمل ميزة 4: نقاط التقاطع في قائمة 6: تحليل الرسم البياني ، لتقدير إحداثيّي الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع ،

ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(4, 4)$، وحيث إن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ إذن حل المعادلة يساوي 4



الخطوة 3: استعمل خاصية **الجدول** لتتحقق من الحلّ.

تحقق من صحة حلّك باستعمال خاصية **الجدول** وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 7: الجدول ثم اختيار 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$ ،

عند القيمة $x = 4$، تكون قيمَتَا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(1 $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$

(2 $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$

(3 $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$

(4 $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$

(5 $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$

(6 $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$

(7 $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$

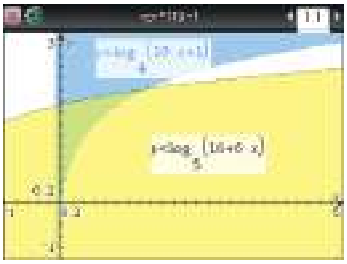
(8 $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI–nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشـاط 2

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المتباينة اللوغاريتمية: $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.

الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة



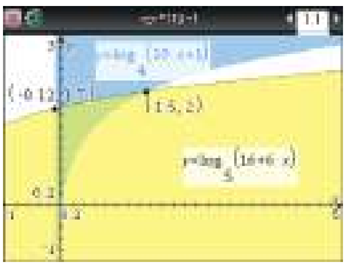
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $y < \log_4 (10x + 1)$، أو $y > \log_4 (10x + 1)$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

on del > ctrl log $\log_4 (10x - 1)$ enter tab del < $\log_5 (16 + 6x)$ enter

الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل



الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة

الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x + 1 \le 0$.

$$10x + 1 \le 0$$

$$10x \le -1$$

$$x \le -\frac{1}{10}$$

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على مفتاح menu

واختيار 6 تحليل الرسم البياني ومنها 4 نقاط التقاطع ثم اضغط في أي نقطة

على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(1.5, 2)$،

ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3: استعمال ميزة تطبيق القوائم وجداول البيانات للتحقق من الحل.

ابدأ الجدول عند -0.1، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثًا في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = \log_4 (10x + 1)$ في العمود الثاني،

$y2 = \log_5 (16 + 6x)$ في العمود الثالث، واختر مرجع المتغير في كل مرّة، سترى أن قيم

الجدول تؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire؛ لحل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك:

9) $\log_7 x < -1$

10) $\log_5 (12x + 5) \le \log_5 (8x + 9)$

11) $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$

12) $\log_5 (3 - 2x) \ge \log_5 (4x + 1)$

13) $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$

14) $\log_3 (3x - 5) \ge \log_3 (x + 7)$

15) $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$

16) $\log_2 2x \le \log_4 (x + 3)$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-1, 2-2)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$ ، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذًا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-3)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$ ، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $x = b^y$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-4)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$
وَ $$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$
- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

اللوغاريتم العشري (الدرس 2-6)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10 .
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$

المفردات

الدالة الأسية ص 82	المتباينة الأسية ص 94
النمو الأسي ص 83	اللوغاريتم ص 97
عامل النمو ص 83	الدالة اللوغاريتمية ص 99
الاضمحلال الأسي ص 84	المعادلة اللوغاريتمية ص 112
عامل الاضمحلال ص 84	المتباينة اللوغاريتمية ص 114
المعادلة الأسية ص 92	اللوغاريتم العشري ص 118
الربح المركب ص 93	صيغة تغيير الأساس ص 121

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة ________ .

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى ________ x للأساس b .

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 ________ .

4) ________ هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال ________ كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ ________ .

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$ ، حيث $b > 0, b \neq 1$ ________

دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

2-1 الدوال الأسية (الصفحات 82 - 89)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

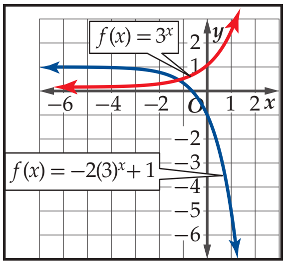
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًّا.

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة.

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



التمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 3^x$

- $a = -2$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويتسع رأسيًّا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى الأعلى.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 92 - 96)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

15) $16^x = \frac{1}{64}$

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

20) $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h؟

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$	أعد الكتابة لتوحيد الأساس
$2^{6x} = 2^{5x-5}$	بسّط
$6x = 5x - 5$	خاصية المساواة للأسس
$x = -5$	بسّط

الحل هو -5 .

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 97 - 103)

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية.

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية.

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$

25) $\log_2 \frac{1}{8}$

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$

27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$ افرض أن العبارة تساوي y

$64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم

$2^6 = 2^y$ $64 = 2^6$

$6 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن $\log_2 64 = 6$.

2-4 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 105 - 111)

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$

29) $\log_5 64$

30) $\log_5 4$

31) $\log_5 \frac{1}{8}$

32) $\log_5 \frac{1}{2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5y^2z^3$

34) $\log_5 ab^{-3}c^4d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$

36) $2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

37) **هزات أرضية:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدةَ هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟

مثال 4

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5(16 \times 2)$ $32 = 16 \times 2$

$= \log_5 16 + \log_5 2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 1.7227 + 0.4307$ استعمل الحاسبة

≈ 2.1534 بسّط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2y^{-4}z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2, y^{-4}, z

$\log_3 x^2y^{-4}z$

$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 2\log_3 x - 4\log_3 y + \log_3 z$ خاصية لوغاريتم القوة

دليل الدراسة و المراجعة

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 117 - 112)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي إن أمكن، ثم تحقق من صحة حلك:

38) $\log_{16} x = \frac{3}{2}$

39) $\log_2 \frac{1}{64} = x$

40) $\log_4 x < 3$

41) $\log_5 x < -3$

42) $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$

43) $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$

44) $\log_3 (3x + 4) \le \log_3 (x - 2)$

45) **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد الفرق بين ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه وارتفاع صوت شخص واحد على فرض أن الشدة النسبية لصوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$3x(4) = 36$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلا الطرفين على 12

التحقق:

$$\log_3 3x + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 3 \times 3 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 9 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 (9 \times 4) \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 36 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

الحل صحيح.

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x < 9$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 9, x \in R\}$

التحقق:

عوض بعدد أقل من 9، وعدد أكبر من 9 في المتباينة الأصلية

$x = 1$	$x = 27$
$\log_{27} 1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$\log_{27} 27 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 < \frac{2}{3}$ ✓	$1 < \frac{2}{3}$ ✗

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

46) $3^x = 15$

47) $6^{x^2} = 28$

48) $8^{m+1} = 30$

49) $12^{r-1} = 7^r$

50) $3^{5n} > 24$

51) $5^{x+2} \le 3^x$

52) اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log_4 11$

b) $\log_2 15$

53) **مال:** استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر. استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

a) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟

b) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$5^{3x} = 7^{x+1}$	المعادلة الأصلية
$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$3x \log 5 = (x+1) \log 7$	خاصية القوة للوغاريتمات
$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$	اطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين
$x(3 \log 5 - \log 7) = \log 7$	أخرج x عامل مشترك
$x = \frac{\log 7}{3 \log 5 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $3 \log 5 - \log 7$
$x \approx 0.6751$	استعمل الحاسبة

تطبيقات ومسائل

54) **أسعار:** تزداد أسعار السلع سنويًّا؛ بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًّا، ويُعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1432هـ (الدرس 2-1)

a) كم كان سعر السلعة عام 1432هـ؟

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1447هـ تقريبًا؟

55) **سيارات:** ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًّا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. (الدرس 2-2)

a) ما معدل انخفاض سعر السيارة سنويًّا؟

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟

56) **استثمار:** ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال، واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: (الدرس 2-2)

السنة	المبلغ (ريال)
1422 هـ	250000
1430 هـ	329202
1435 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار.

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه، ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟

57) **كيمياء:** يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة

$$t = \frac{16 \log_{10} \frac{N}{N_0}}{\log_{10} \frac{1}{2}}$$ (الدرس 2-3)

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟

58) **زلازل:** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتُعطى R بالعلاقة:
$R = 0.67 \cdot \log_{10} (0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-5)

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة.

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر.

59) **أحياء:** يعرّف زمن الجيل G بأنه الزمن اللازم ليصبح عدد فصيلة نادرة من الحيوانات مثلي ما كان عليه، ويُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذه الفصيلة 6 سنوات، ويوجد الآن من هذه الفصيلة 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذه الفصيلة 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-5)

60) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع (I)، وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة
$\beta = 10 \log_{10} \frac{I}{10^{-12}}$ (الدرس 2-6)

a) حدّد شدة الصوت إذا كان عدد وحدات الديسبل 100.

b) قارنت سميرة الصوت في الفرع a مع صوت آخر عدد وحدات الديسبل فيه 50 ديسبل ، فاستنتجت أن شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برّر إجابتك.

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد عدد وحدات الديسبل إذا ضوعفت شدته؟

61) **مال:** السعر الأصلي لسلعة 8000 ريال، وازداد سعرها باستمرار؛ بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. (الدرس 2-6)

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًّا، فبعد كم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟

اختبار الفصل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$

7) $\log_5 x > 2$

8) $\log_3 x + \log_3 (x - 3) = \log_3 4$

9) $6^{n-1} \leq 11^{n}$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 11 \approx 1.4899$، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$

11) $\log_5 \frac{11}{2}$

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثّل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية.

14) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟

A -3

B $-\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{3}$

D 3

15) **زراعة:** تمثّل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة.

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 9% ، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًّا .

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟

c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟

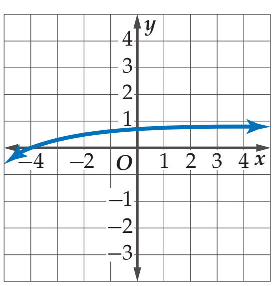
A $\frac{1}{2}$

B 4

C 2

D 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟



A $y = \log_{10} (x - 5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10} (x + 5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2 \log_3 x + 6 \log_3 (z - 2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة.

الفصل 3

المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$
2) $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$
4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \mathrm{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \mathrm{cm}$، فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

6) $x^2 + 6x = 0$
7) $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$
9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \mathrm{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.

x ft

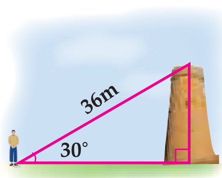
$(x + 1)$ ft

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45°$
12) $\cos 225°$

13) $\tan 150°$
14) $\sin 120°$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

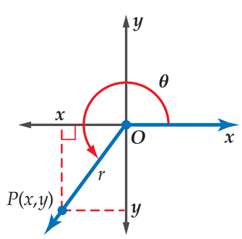
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$



3-1 المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة
identity

المتطابقة المثلثية
trigonometric identity

المتطابقات النسبية
quotient identities

متطابقات المقلوب
resiprocal identities

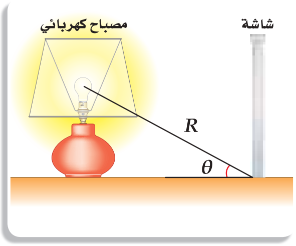
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities

متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec \theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},\ \cos \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},\ \sin \theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta},\ \csc \theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta},\ \sin \theta \neq 0$

$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta},\ \sec \theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta},\ \cos \theta \neq 0$

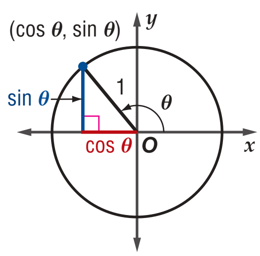
$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta},\ \cot \theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta},\ \tan \theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$



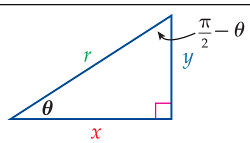
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$



$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

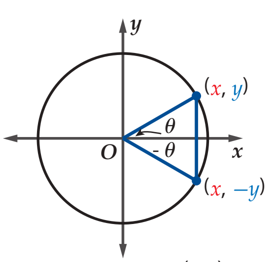
$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$



$\sin \theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos \theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos \theta$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	متطابقات فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين
$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$	عوّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$	أوجد مربع العدد $\frac{1}{4}$
$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$	خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48^\circ$ استعمل الحاسبة

لأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، فإن $\theta \approx 180^\circ - 14.48^\circ = 165.52^\circ$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ 165.52° .

$\cos 165.52^\circ \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270^\circ < \theta < 360^\circ$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	متطابقات فيثاغورس
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$	عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$
$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$	أوجد مربع العدد $-\frac{3}{5}$
$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$	$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$
$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$	خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

✓ تحقق من فهمك

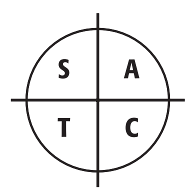
1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

إرشادات للدراسة

الأرباع:
يساعدك الجدول والشكل أدناه على تذكّر أي الدوال المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1 , 2	3 , 4
$\csc\theta$		
$\cos\theta$	1 , 4	2 , 3
$\sec\theta$		
$\tan\theta$	1 , 3	2 , 4
$\cot\theta$		



A all functions
S sine
T tangent
C cosine

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب$(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\,\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

2A) $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

2B) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوَّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } E$$

$$E\,\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } \cos\theta$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad \text{اضرب كلا الطرفين في } E$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad \text{اقسم كلا الطرفين على } R^2$$

$$E = \frac{I\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع (a) تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة . $\tau = Fr\sin\theta$
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

بسِّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta(1 + \cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$

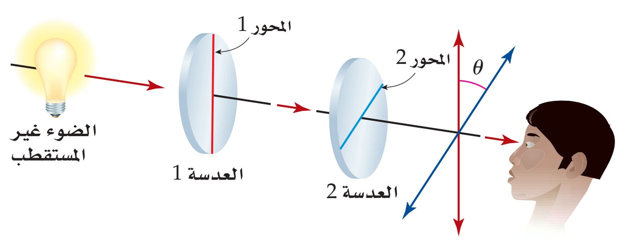
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\ \cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لـ W.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80, \theta = 40°, A = 0.75$. $S = 1000\ W/m^2$ (قرّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية ؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة ، بيانيًّا.

c) **تحليليًّا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين ؛ فإن المعادلة تمثِّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

27) **تبرير:** وضّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$.

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة:
$\tan\theta\sin\theta$

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة:
$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

علاء

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\operatorname{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

34) $\tan\left(\operatorname{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$

35) $\sin\left(\operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

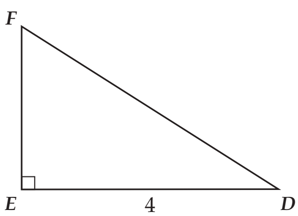
36) $\cos\left(\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$

37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة:
$f(x)=\begin{cases}K+x^2, & x<5\\ 3x+2, & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (الدرس 3-1)

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (الدرس 2-2)

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5   **C** 3.2

B 4   **D** 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0°<x<90°$، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها. (الدرس 3-1)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$، حيث $0° < \theta < 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي — **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 — **إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ — الطرف الأيسر

$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$ — اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$

$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$ — $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$

$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$ — $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$= 1+\cos\theta$ ✓ — اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$

= الطرف الأيمن

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$

B $\csc\theta$

C $\cot^2\theta$

D $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta \frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta \cdot \cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta\,(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$

B $\tan^2\theta$

C $\cos^2\theta$

D $\sin^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّض بها في البديل المختار، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلًّا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

تنبيه!

تبسيط الطرفين
تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

12) $\sec \theta - \tan \theta = \dfrac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

13) $\dfrac{1 + \tan \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \sec \theta$

14) $\sec \theta \csc \theta = \tan \theta + \cot \theta$

15) $\sin \theta + \cos \theta = \dfrac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sin \theta - \cos \theta}$

16) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \dfrac{2 + \sec \theta \csc \theta}{\sec \theta \csc \theta}$

17) $\dfrac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \dfrac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

18) $\csc \theta - 1 = \dfrac{\cot^2 \theta}{\csc \theta + 1}$

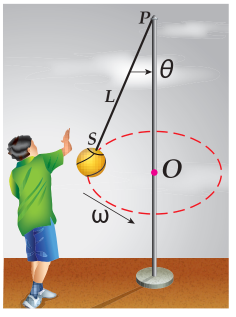
19) $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta$

20) $\sin \theta \cos \theta \tan \theta + \cos^2 \theta = 1$

21) $\sec \theta - \cos \theta = \tan \theta \sin \theta$

22) $\csc^2 \theta = \cot^2 \theta + \sin \theta \csc \theta$

23) $\dfrac{\sec \theta - \csc \theta}{\csc \theta \sec \theta} = \sin \theta - \cos \theta$



24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل L الذي طرفاه p, s والزاوية المحصورة شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g \sec \theta}{\omega^2}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g \tan \theta}{\omega^2 \sin \theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟ وضح إجابتك.

25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره $16.7\,m$. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos \theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

26) $\cot(-\theta) \tan(-\theta)$

27) $\sin \theta \csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

29) $\sec(-\theta) \cos(-\theta)$

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

31) $\cot(-\theta) \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

32) $\cos(-\theta) \sec \theta$

33) $\sin(-\theta) \csc \theta$

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \csc \theta}{\csc^2 \theta}$

35) $\dfrac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta}$

36) $\dfrac{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

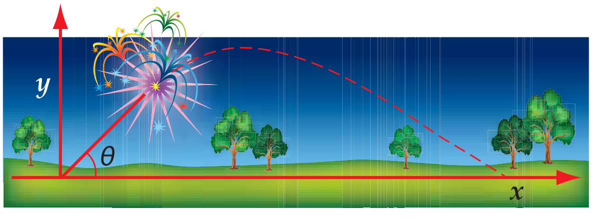
37) $\tan \theta \cos \theta$

38) $\cot \theta \tan \theta$

39) $\sec \theta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

40) $(\sec^2 \theta + \csc^2 \theta) - (\tan^2 \theta + \cot^2 \theta)$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2 \theta} + \dfrac{x \sin \theta}{\cos \theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan \theta$.



42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$.

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $1 = 2 \sin x$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًّا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثِّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًّا:** خمِّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

45) **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست متطابقة.

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

47) **تبرير:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin \theta)$ وجيب التمام $(\cos \theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

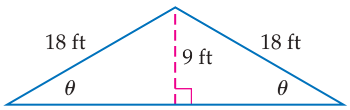
مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 1–3)

50) $\sin \theta$، إذا كان $\cos \theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$

51) $\cos \theta$، إذا كان $\sec \theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$

52) **هندسة معمارية:** يمثِّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة)



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 1–3)

53) $\sin \theta \cos \theta (1 + \cot^2 \theta)$

54) $\dfrac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$

تدريب على اختبار

55) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟

A) $\dfrac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

B) $\dfrac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$

C) $\cot \theta \sin \theta$

D) $\tan \theta \csc \theta$

56) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثِّل متطابقة:
$\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-3

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
Sum and Difference of Angles Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

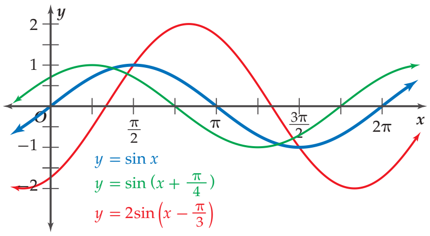
والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟

تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلاً.
ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$, x. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلاً يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

مفهوم أساسي — متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع

- $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

متطابقات الفرق

- $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- $\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 — إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين °45 وَ °60 يساوي °105، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin (60° + 45°) \qquad 105° = 60° + 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \qquad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{عوِّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{بسِّط}$$

b) $\cos (-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos (-120°) = \cos (60° - 180°) \qquad -120° = 60° - 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \qquad \text{عوِّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{بسِّط}$$

إرشادات للدراسة

كوِّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين °0 , °360، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

✓ تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ **1B)** $\cos (-15°)$

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$ الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير .

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ عوّض

$= \sin \theta$ ✓ بسّط

$=$ الطرف الأيمن

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ (b

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوّض
$= \cos\theta$ ✓	بسّط
= الطرف الأيمن	

تحقق من فهمك

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (3A

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ (3B

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$
2) $\cos 105°$
3) $\cos 75°$
4) $\cos\frac{\pi}{12}$
5) $\sin 135°$
6) $\sin(-210°)$
7) $\cos 135°$
8) $\tan 195°$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120°\,t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزوايا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

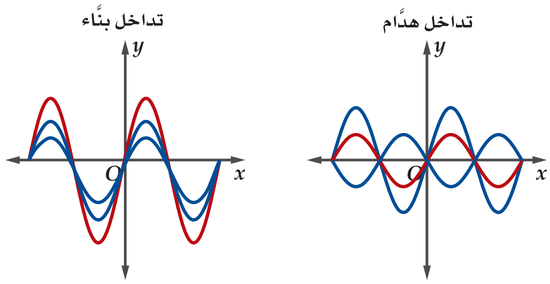
12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

15) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة"لماذا؟"؛ في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدَّامًا.



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°),\ y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسِّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$
18) $\sec 1275°$
19) $\sin 735°$
20) $\tan\frac{23\pi}{12}$
21) $\csc\frac{5\pi}{12}$
22) $\cot\frac{113\pi}{12}$

23) بيِّن أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$ ، حيث A, θ زاويتان حادتان .

(24 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin(x + x - 15°)$ ، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

(25 $\sin(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

(26 $\cos(A + B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

(27 $\sec(A - B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

(28 $\sin(A + B)\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

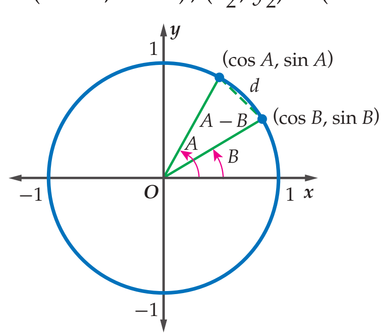
مسائل مهارات التفكير العليا

(29 **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

(30 **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot(A + B)$ بدلالة $\cot B$ ، $\cot A$.

(31 **برهان:** الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$ ، $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$



(32 **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

(33 **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3-1)

(34 $\sin\theta\csc\theta - \cos^2\theta$

(35 $\cos^2\theta\sec\theta\csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-1)

(36 $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

(37 $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ ، $180° < \theta < 270°$

(38 $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = -\frac{7}{12}$ ، $90° < \theta < 180°$

(39 $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $270° < \theta < 360°$

(40 $\tan\theta$ ، إذا كان $8\cos\theta - 5 = 0$ ، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين: (الدرس 3-2)

(41 $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

(42 $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

تدريب على اختبار

(43

ما القيمة الدقيقة للعبارة:

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

(44 **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$.

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–3 إلى 3–3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1–3)

1) $\cot \theta \sec \theta$

2) $\dfrac{1-\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

3) $\dfrac{1}{\cos \theta} - \dfrac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$

4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) \csc \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1–3)

5) $\sin \theta$، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc \theta$، إذا كان $\cot \theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan \theta$، إذا كان $\sec \theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\dfrac{\cos \theta}{1-\sin^2 \theta}$ ؟ (الدرس 1-3)

A $\cos \theta$

B $\csc \theta$

C $\tan \theta$

D $\sec \theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan \theta = \dfrac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 2–3)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله.

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

10) $\cot^2 \theta + 1 = \dfrac{\cot \theta}{\cos \theta \cdot \sin \theta}$

11) $\dfrac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} = 1$

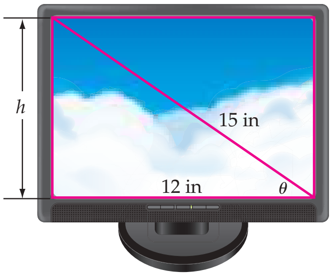
12) $\dfrac{\sin \theta \tan \theta}{1-\cos \theta} = (1+\cos \theta) \sec \theta$

13) $\tan \theta (1-\sin \theta) = \dfrac{\cos \theta \sin \theta}{1+\sin \theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 1–3)

a) أوجد قيمة h .

b) بيّن أن $\cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\sin \theta}$



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 2–3)

15) $\dfrac{\sin \theta \cdot \sec \theta}{\sec \theta - 1} = (\sec \theta + 1) \cot \theta$

16) $\sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$

17) $\cot \theta (1-\cos \theta) = \dfrac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{1+\cos \theta}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3–3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin(-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos \frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3–3)

A $\sqrt{2}$

B $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

C $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

D $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 2–3)

$\cos 30° \cos \theta + \sin 30° \sin \theta = \sin 60° \cos \theta + \cos 60° \sin \theta$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مثال 1 — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — عوّض $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — ربّع ثم اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}; 0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos\theta, \sin\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$ متطابقة ضعف الزاوية

$$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$ $\sin\theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ تعريف دالة الظل

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$ $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$ بالقسمة وإنطاق المقام

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$ متطابقة ضعف الزاوية

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$ $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}}$$ ربِّع المقام

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$$ بسِّط

$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3}; 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$ 2B) $\tan 2\theta$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ استعمل متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بسِّط

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. إذن، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$، $67.5°$ في الربع الأول، فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ اطرح

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ اضرب

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ بسِّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$، θ تقع في الربع الثاني.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 4 من واقع الحياة — التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط كلًا من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة **g** عندما $L = 45°$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 — إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب في $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}\ \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

= الطرف الأيسر

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها $37°$ مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

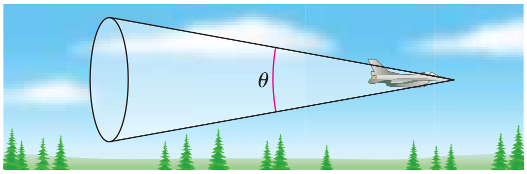
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 95 ft/s. برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A$, $\theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13.

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في **(a)** لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في **(c)** لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(27 **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ : $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin (45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

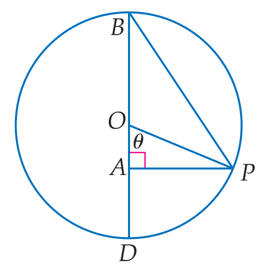
سلمان

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

(28 **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها، لتبرهن أن: $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



(29 **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

(30 **برهان:** استعمل الصيغة $\sin (A + B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos (A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

(31 **تبرير:** اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

(32 **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32 \text{ ft/s}^2)$

مراجعة تراكمية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 3–2)

(33 $\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

(34 $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta}$

(35 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–3)

(36 $\sin 135°$

(37 $\cos 105°$

(38 $\sin 285°$

(39 $\cos 210°$

(40 $\sin (-240°)$

(41 $\cos (-120°)$

(42 $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$.

تدريب على اختبار

(43 أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 < \theta < 90°$.

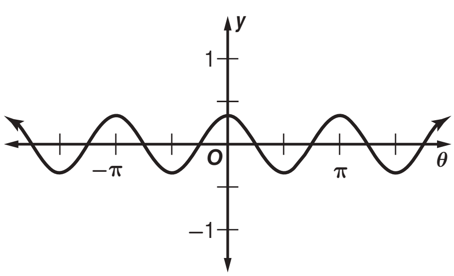
A $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

B $\sqrt{3} - 2$

C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D $\sqrt{3}$

(44 معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3 \cos 2\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$

C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

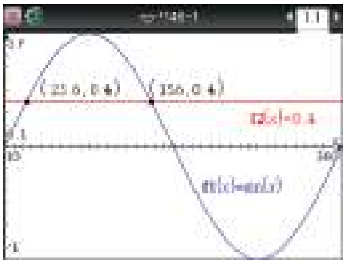
معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire ؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة ، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \leq x < 360°$.



الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5 الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند... ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \sin x, f2(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ‎ trig sin x enter tab 0.4 enter

- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4 تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة

وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ $0°$ ، والقيمة العظمى لـ x بـ $360°$،

كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ -1 ، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6 تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \leq x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 156.0°, x \approx 23.6°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0° \leq x < 360°$.

الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًا

- أعد كتابة المعادلة $f1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x, f2(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on (trig tan x ^ 2 ▸ ▸ trig cos x + 3 trig cos x enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7; 0° \leq x < 360°$
2) $\tan x = \cos x; 0° \leq x < 360°$
3) $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \leq x < 360°$
4) $0.25 \cos x = 3.4; -720° \leq x < 720°$
5) $\sin 2x = \sin x; 0° \leq x < 360°$
6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0; -360° \leq x < 360°$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-5 حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.
(الدروس من 2–3 إلى 4–3)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًّا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ ، إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

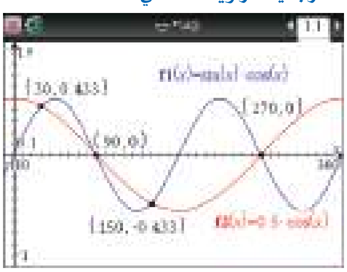
$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل بأخذ عامل مشترك

$\cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ $\qquad \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية $150°$ هي $30°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$



التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin \theta \cos \theta,\ y = \frac{1}{2} \cos \theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين $0°$ وَ $180°$ فقط.

b) $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$ حلّل

$2 \sin \theta + 1 = 0$ أو $\sin \theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2 \sin \theta = -1$ $\qquad \sin \theta = 2$

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$ $\qquad \sin \theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin \theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$
$$2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُل المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$، إذا كانت $0 \le x \le 2\pi$.

1B) حُل المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

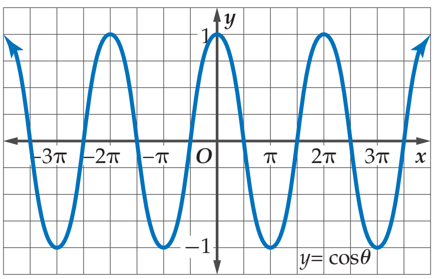
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان، أو $[0°, 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots, \pi, 3\pi, 5\pi$، وكذلك $\ldots, -\pi, -3\pi, -5\pi$، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π. طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

2A) حُل المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُل المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ — k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ — اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ — ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ — $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ — بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$ — حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\ne 1 \times \end{aligned}$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$$ المعادلة الأصلية

$$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$$ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

$$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$$ خاصية التوزيع

$$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$$ حلّل

$$\tan^2\theta + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad \tan^2\theta - 3 = 0$$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$$\tan^2\theta = -1$$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$$\tan^2\theta = 3$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{3}$$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$$

$$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$$

$$8 - 9 = -1 \checkmark$$

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2 \theta + 2\cos\theta + 1 = 0 \,;\, 0° \le \theta \le 360°$

2) $2\cos^2 \theta + \cos\theta = 1 \,;\, 0° \le \theta \le 360°$

3) $-2\sin^2 \theta = 7 - 15\sin\theta \,;\, 0° \le \theta \le 360°$

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \,;\, 0° \le \theta \le 240°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

6) $2\cos^2\theta = 1$

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$

8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع **a**، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسِّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan\theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4}; 0° \le \theta \le 360°$

18) $2\sin^2\theta = 1; 90° < \theta < 270°$

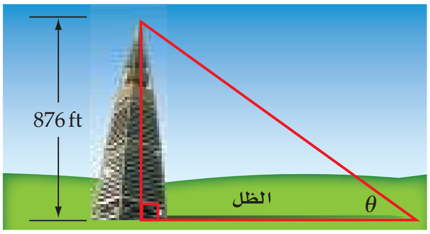
19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0; 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0; 180° < \theta < 360°$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft. أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$، 24 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

26) $2\sin^2\theta + (\sqrt{2} - 1)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

27) $2\sin\theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

29) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

30) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin \boldsymbol{i} = n_2 \sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و $\boldsymbol{i}$ قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر الألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًّا ونقيًّا أم لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta = -\sin\theta$
$2\cos\theta = 1$	$2\cos\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\cos\theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$.

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\csc x = \sqrt{2}$, $\cot^2 x + 1 = 2$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

مراجعة تراكمية

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 4–3)

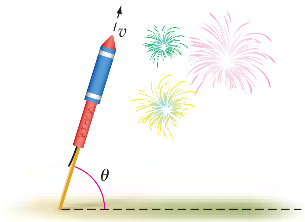
37) $\cos 165°$ 38) $\sin 22\frac{1}{2}°$ 39) $\sin\frac{7\pi}{8}$ 40) $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ 42) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

43) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 44) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

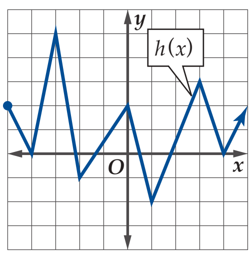
45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8m/sec .



a) أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ تمثِّل متطابقة .

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية 80° ، وسرعة ابتدائية مقدارها 110m/s ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 2-3)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة)



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A 30° أو 150° C 210° أو 330°

B 60° أو 120° D 240° أو 300°

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 1–3, 2–3, 5–3)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–3)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص. 136)	متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص. 136)
المتطابقة المثلثية (ص. 136)	متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 136)
المتطابقات النسبية (ص. 136)	المعادلات المثلثية (ص. 158)
متطابقات المقلوب (ص. 136)	
متطابقات فيثاغورس (ص. 136)	

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$ و $15°$.

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على ________.

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على ________.

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\sin 120°, \cos 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°, 30°$.

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على ________.

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 140 - 136)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $270° < \theta < 360°$، $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

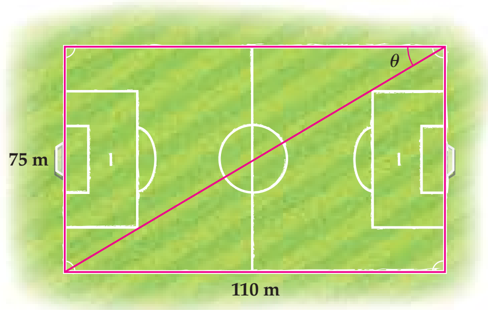
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $90° < \theta < 180°$، $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $0° < \theta < 90°$، $\cot\theta = 2$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $180° < \theta < 270°$، $\sin\theta = -\frac{3}{5}$

14) $\csc\theta$، إذا كان $270° < \theta < 360°$ ، $\cot\theta = -\frac{4}{5}$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما:
75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي :

16) $1 - \tan\theta \sin\theta \cos\theta$

17) $\tan\theta \csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta \sec\theta \cot\theta$.

$$\cos\theta \sec\theta \cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 141 - 145)

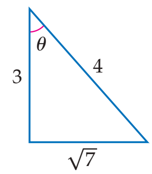
أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$.

$\dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 146 - 149)

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$

25) $\cos 15°$

26) $\sin 210°$

27) $\sin 105°$

28) $\tan 75°$

29) $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

30) $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 151 - 156)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\cos \frac{\theta}{2}$, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع **(b)**.

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ متطابقة نصف الزاوية

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$$ اطرح

$$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$ اقسم، بسِّط، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 163 - <OV>)

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2 \cos \theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$

38) $4 \cos^2 \theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos \theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2 \theta = 2 \sin \theta + 3; 0° \le \theta < 360°$

41) $4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$$\sin 2\theta - \cos \theta = 0$$ المعادلة الأصلية

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$$ متطابقة ضعف الزاوية

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0$$ حلّل

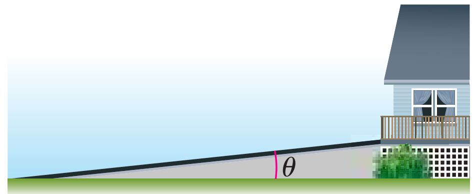
$$2 \sin \theta - 1 = 0$$ أو $$\cos \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$ $$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{3\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ أو } \frac{5\pi}{6}$$

تطبيقات ومسائل

42) **إنشاءات:** يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 1-3)

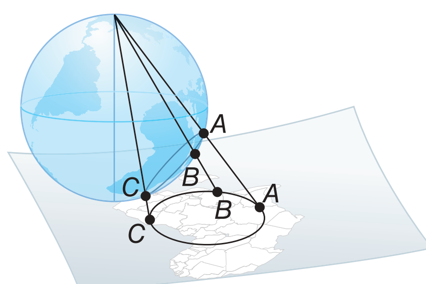


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) **ضوء:** تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى ، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 1-3)

44) **خرائط:** يستعمل إسقاط الستيريوجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 2-3)



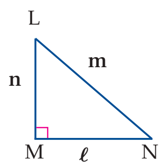
45) **موجات:** يُسمى تداخل موجتين بنَّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنَّاء؟

$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$

(الدرس 3-3)

46) **هندسة:** استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.

(الدرس 4-3)



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 4-3)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) **مقذوفات:** إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$ ، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ.

(الدرس 5-3)

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$؟

A $\cot\theta$ **C** $\sec\theta$

B $\tan\theta$ **D** $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـِ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$ **C** $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ **D** $\frac{4}{5}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -2$ ، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

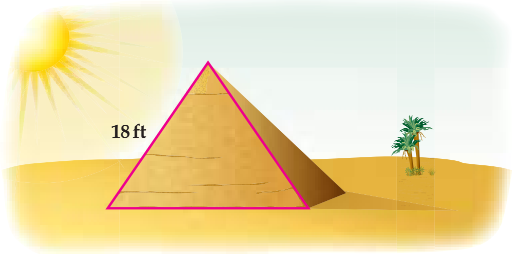
12) $\frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ **C** $1 - \sqrt{2}$

B $\sqrt{2} - 1$ **D** $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجِّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُل كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُل المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \leq \theta \leq 360°$:

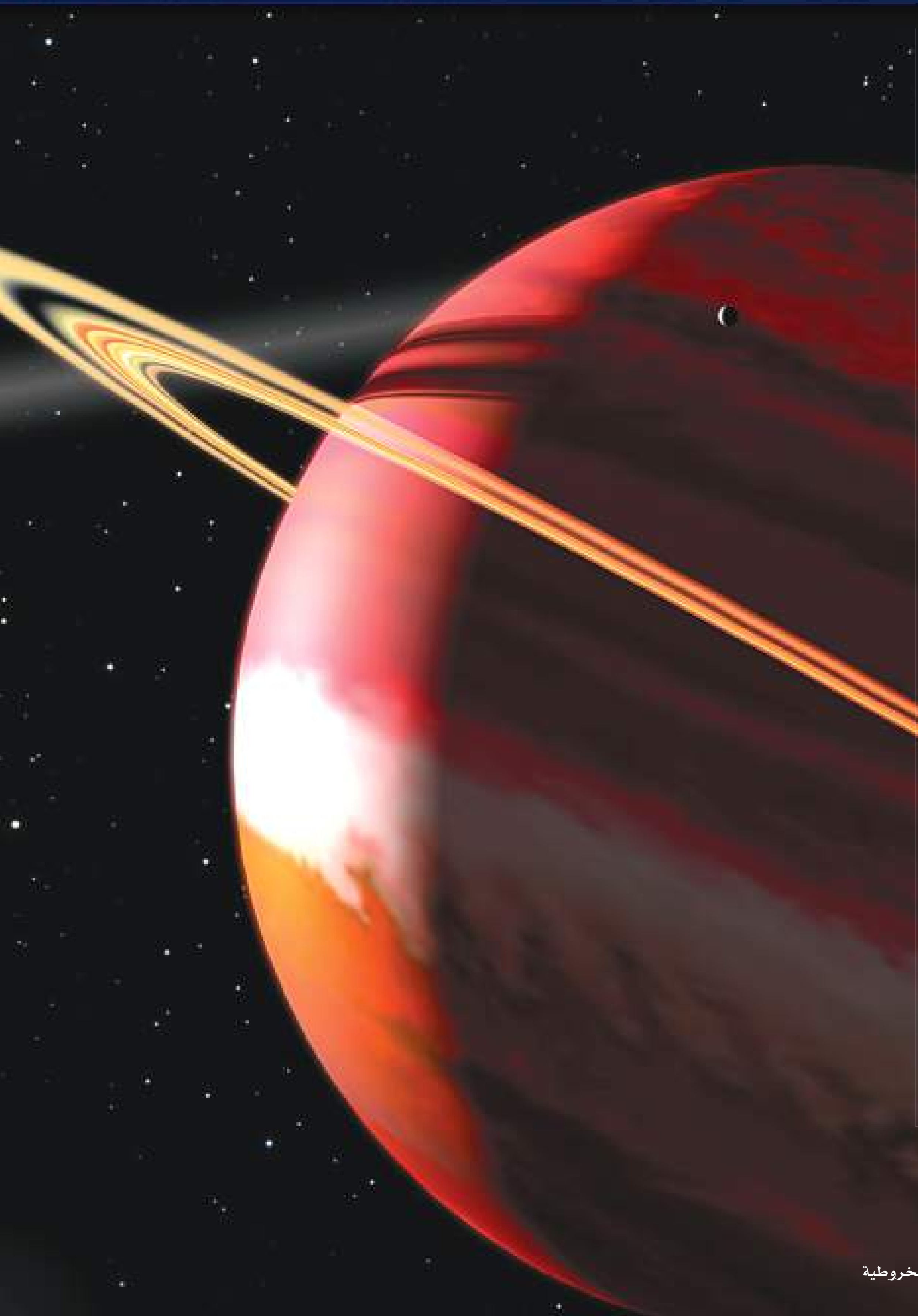
21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الفصل

4

القطوع المخروطية
Conic Sections



فيما سبق:

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا) ، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا). الدرس (5-3)

والآن:

- أُحَلل معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلُّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: للتأكد من المتطلبات السابقة، أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$
2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$
3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$
4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$
6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$
7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$
9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$
10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$
11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$
12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$
13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$
15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

16) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$
17) $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

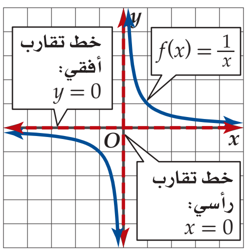
$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.
2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).
3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

4-1 القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

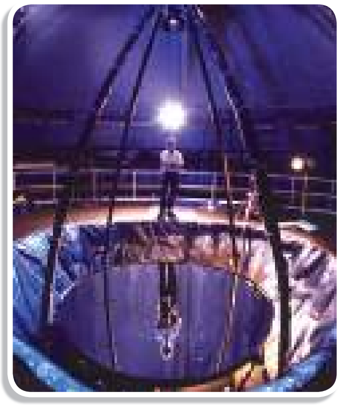
- أحلِّل معادلات قطوع مكافئة، وأمثِّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

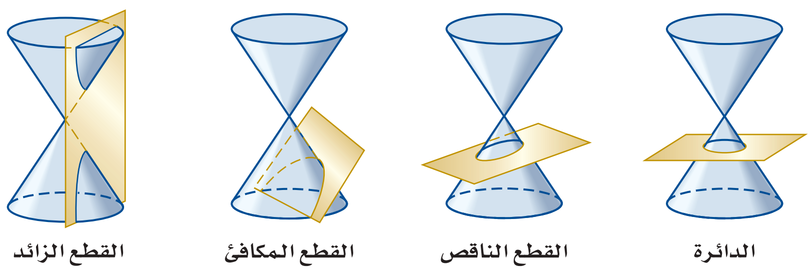
القطع المخروطي conic section
المحل الهندسي locus
القطع المكافئ parabola
البؤرة focus
الدليل directrix
محور التماثل axis of symmetry
الرأس vertex
الوتر البؤري latus rectum

لماذا؟

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.



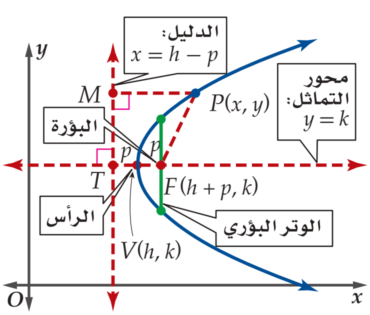
القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.
والقطوع المخروطية الثلاثة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص (وحالة خاصة منه الدائرة) والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا:

المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة (تسمى **البؤرة**) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم (يسمّى **الدليل**).



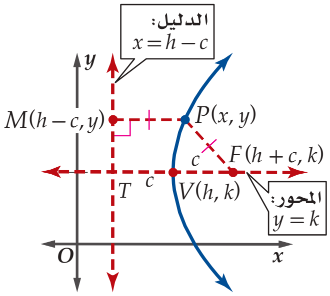
والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

إرشادات للدراسة

القطع
كلمة قطع هي مفرد كلمة قطوع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: ﴿ فَأَسْرِ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ ٱلَّيْلِ ... ﴾[الحجر: 65]

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:

درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل).



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.

نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$PF = PM$	
$\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-y)^2}$	قانون المسافة بين نقطتين
$[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2 = [x-(h-c)]^2 + 0^2$	ربّع الطرفين
$x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2x(h-c) + (h-c)^2$	فك الأقواس
$x^2 - 2xh - 2xc + h^2 + 2hc + c^2 + (y-k)^2 = x^2 - 2xh + 2xc + h^2 - 2hc + c^2$	فك الأقواس
$(y-k)^2 = 4xc - 4hc$	بسّط
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	حلّل

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

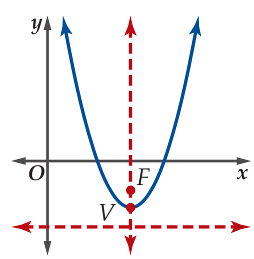
قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

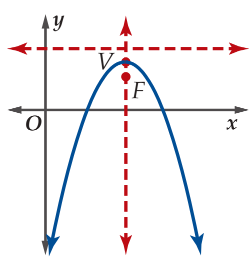
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًّا (إلى اليمين أو اليسار).

مفهوم أساسي — خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



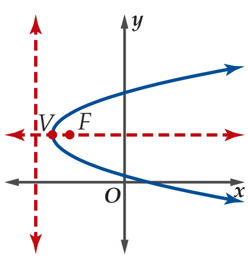
$c > 0$



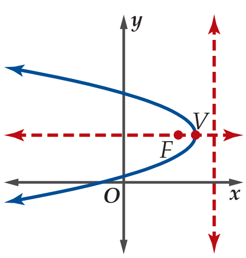
$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$



$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًّا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

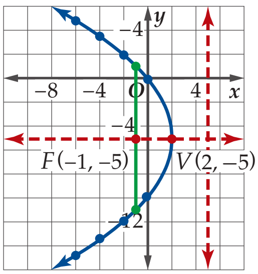
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًّا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\lvert 4c \rvert$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلاً حول محور التماثل.



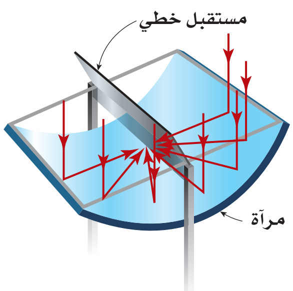
تحقق من فهمك

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية: يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع، أين يقع المستقبل الخطي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k+c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0+0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y-6)$، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:
- مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c < 0$.
- مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري
لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثّل منحناه بيانيًّا.

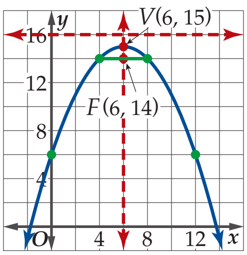
$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$	المعادلة الأصلية
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$	أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$	أكمل المربع
$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$	$-\frac{1}{4}(-36) = 9$
$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$	حلّل
$-4(y - 15) = (x - 6)^2$	اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ (h, k) الدليل: $y = 16$ $y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $(h, k + c)$ محور التماثل: $x = 6$ $x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $|4c|$



عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

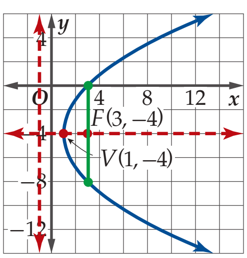
a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$	$c = 2, h = 1, k = -4$
$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$	بسّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.



مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

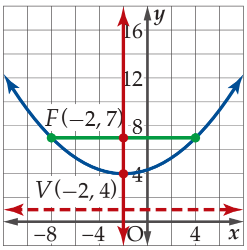
b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.



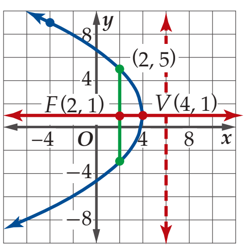
$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times (-2)| = 8$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

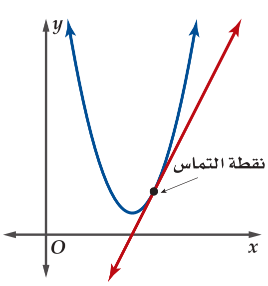
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

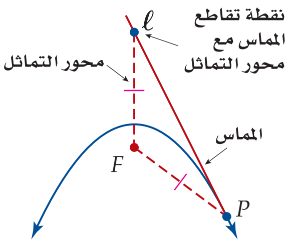
– إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$

– إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 — كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

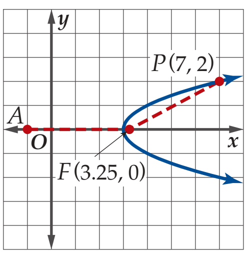
المنحنى مفتوح أفقيًا.

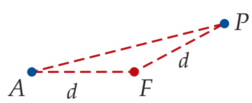
$$x = y^2 + 3 \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x - 3) = (y - 0)^2 \qquad \text{الصورة القياسية}$$

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F ، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2} \qquad (x_2, y_2) = (7, 2) \text{ و } (x_1, y_1) = (3.25, 0)$$

$$= 4.25 \qquad \text{بسّط}$$

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل)

بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4} \qquad \text{صيغة الميل}$$

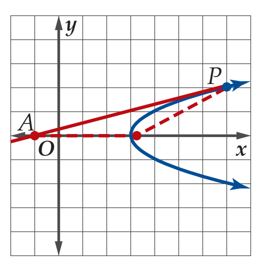
$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7) \qquad m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \qquad \text{اجمع 2 إلى الطرفين}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4;\ (-1, 8)$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4};\ (1, -4)$

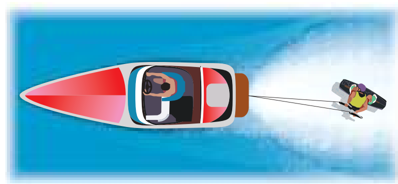
تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$
2) $(x+1)^2 = -12(y-6)$
3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$
4) $-40(x+4) = (y-9)^2$
5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$
6) $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

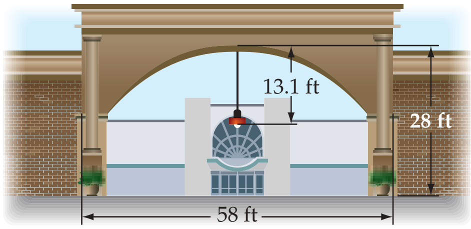
اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$
10) $y^2 + 33 = -8x - 23$
11) $3x^2 + 72 = -72y$
12) $60x - 80 = 3y^2 + 100$
13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$
14) $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$.
16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.
17) البؤرة $(2, -1)$ والرأس $(-4, -1)$.
18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$.
20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.
21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$.
22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

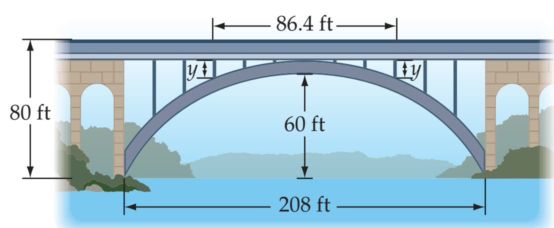
اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\ ;(-5, -5)$
25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\ ;(24, 2)$
26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\ ;(0, 14)$
27) $-4x = (y+5)^2 ;(0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$
29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$
30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$
31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

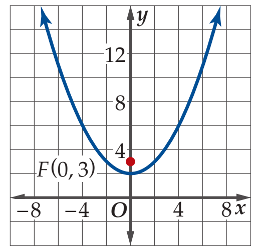


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y.

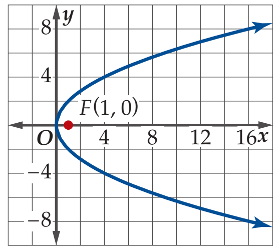
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft.

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، في كلٍّ مما يأتي:

(33



(34



(35 **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ ii) $y^2 = 8(x-2)$ iii) $y^2 = 16(x-2)$

b) **بيانيًا:** مثِّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيِّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

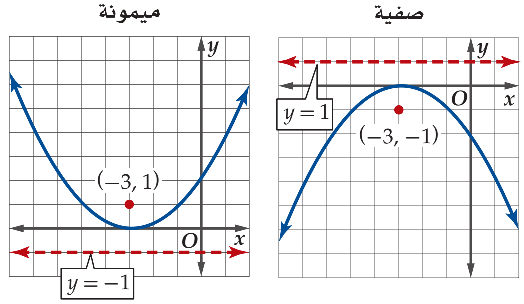
d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$
ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

(36 **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

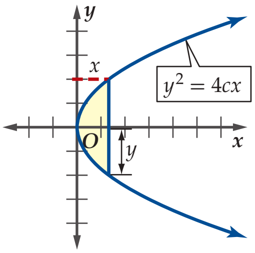
ميمونة | صفية



(37 **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

(38 **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك.

(39 **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات.



(40 **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-2)

(41 $\log_{16} 4$ **(42** $\log_4 16^x$ **(43** $\log_3 27^x$

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. (الدرسان 2-5 ,2-2)

(44 $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(45 $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$

(46 $\log_3 x \le -3$

(47 أوجد كلًّا مما يأتي إذا كان: (الدرس 1-1)
$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$

b) $h(6x)$

c) $h(10-2c)$

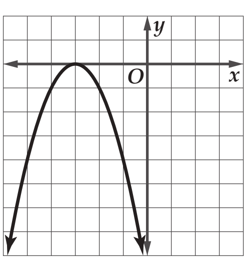
(48 إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$، حيث θ زاوية في الربع الأول. (الدرس 1-3)

تدريب على اختبار

(49 إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ B $\sqrt{x^3}$ C $x^{\frac{3}{4}}$ D $\sqrt{x^5}$

(50 ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

B $y = |x|$

C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.
(الدرس 1 — 4)

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

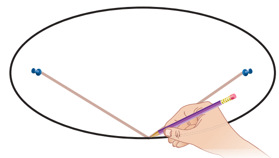
المفردات:

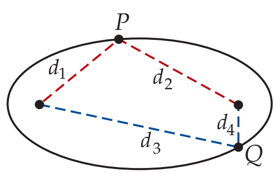
القطع الناقص ellipse
البؤرتان foci
المحور الأكبر major axis
المركز center
المحور الأصغر minor axis
الرأسان vertices
الرأسان المرافقان co-vertices
الاختلاف المركزي eccentricity

لماذا؟

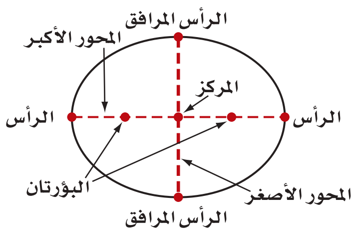
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلاً إهليليجيًا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .

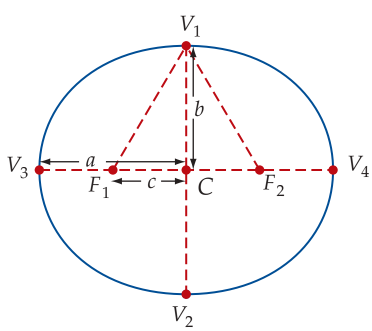




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمّى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



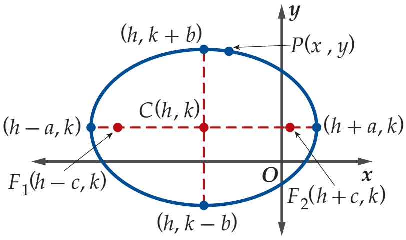
بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS
$(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_2C})$
فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛
لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.



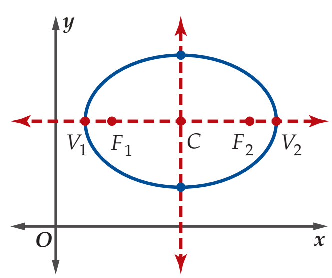
$PF_1 + PF_2 = 2a$	تعريف القطع الناقص
$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$	صيغة المسافة
$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$	خاصية التوزيع ثم التجميع
$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$	اطرح
$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$	ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين
$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$	بسّط
$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$	اقسم كلا الطرفين على 4
$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	ربّع الطرفين
$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$	خاصية التوزيع
$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$	بسّط
$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$	$a^2 - c^2 = b^2$
$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	اقسم الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k) ، حيث $a > b$ ، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ ، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًّا، وفي الصورة القياسية $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًّا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a =$

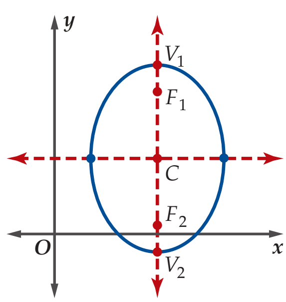
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2-b^2}$

طول البعد البؤري: 2C

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a =$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b =$

العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2-b^2}$

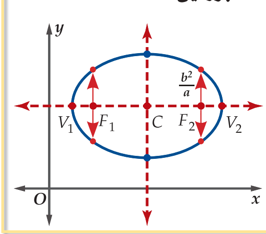
طول البعد البؤري: 2C

إرشادات للدراسة

البعد البؤري

المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

لرسم القطع الناقص نعين نقاطًا مساعدة وهي التي تبعد مسافة $\frac{b^2}{a}$ أعلى وأسفل كل من البؤرتين.



إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\dfrac{(x-3)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

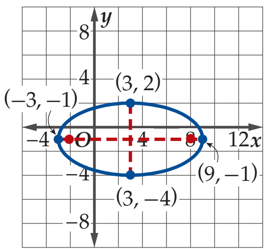
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث

$h = 3, k = -1, a = \sqrt{36} = 6, b = \sqrt{9} = 3, c = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	a^2 مقسومًا على $(x-h)^2$
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y = -1$، وطوله 12	$y = k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x = 3$، وطوله 6	$x = h$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$ المعادلة الأصلية

$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$ جمّع الحدود المتشابهة

$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$ حلّل

$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$ كمّل المربعين

$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ حلّل وبسّط

$\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$ اقسم الطرفين على 16

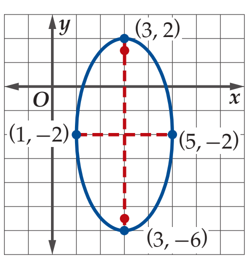
المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	a^2 مقسومًا على $(y-k)^2$
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x = 3$، وطوله 8	$x = h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y = -2$، وطوله 4	$y = k$، طول المحور الأصغر $2b$

عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



تحقق من فهمك

1A) $\dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

1B) $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

b) الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$a = 5$$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$$ صيغة المسافة

$$c = 3$$ بسّط

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$ العلاقة بين a, b, c

$$3^2 = 5^2 - b^2$$ $a = 5, c = 3$

$$b = 4$$ بسّط

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .

تحقق من فهمك

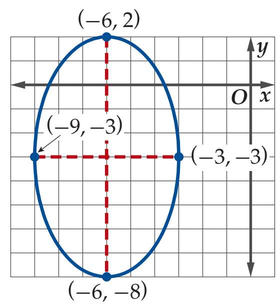
2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

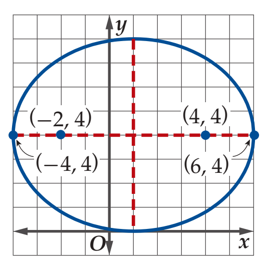
إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 4.2.1



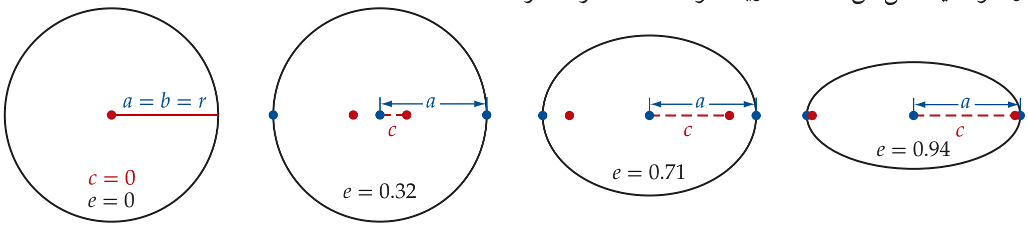
الشكل 4.2.2

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن **الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة** $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي c, e تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من b, a مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $a^2 = 100, b^2 = 9$

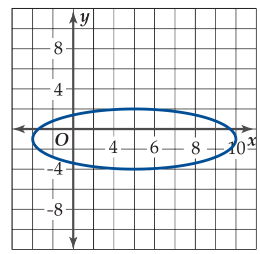
$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي c, a لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

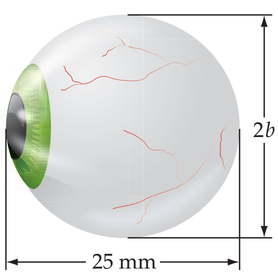
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$ معادلة القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$ $e = 0$ عندما $a = b$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$ اضرب كلا الطرفين في a^2.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$ a نصف قطر الدائرة

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$ الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

$$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 4^2$$ $(h, k) = (-1, 2), r = \frac{8}{2} = 4$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$$ بسّط

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$، والقطر 10

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(7, 6), (-1, -8)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + (-8)}{2}\right)$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (-1, -8)$

$$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$ اجمع

$$= (3, -1)$$ بسّط

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ صيغة المسافة بين نقطتين

$$= \sqrt{(3-7)^2 + (-1-6)^2}$$ $(x_1, y_1) = (7, 6), (x_2, y_2) = (3, -1)$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$$ اطرح

$$= \sqrt{65}$$ بسّط

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2 = 65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5), (3, -3)$.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(-7, -3), (13, -3)$ ، والبؤرتان $(-5, -3), (11, -3)$

6) الرأسان $(4, -9), (4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2), (-13, 2)$ ،
وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0), (-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3), (-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7), (-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

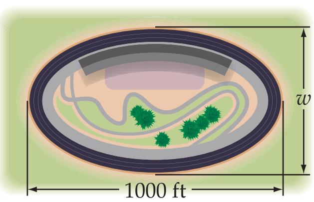
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1) , (2, -4)$

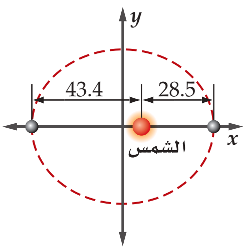
19) $(-4, -10) , (4, -10)$

20) $(5, -7) , (-2, -9)$

21) $(-6, 4) , (4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

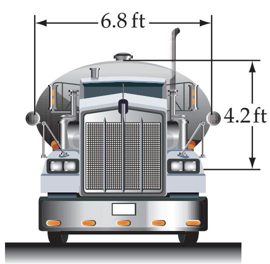
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي للخزان.

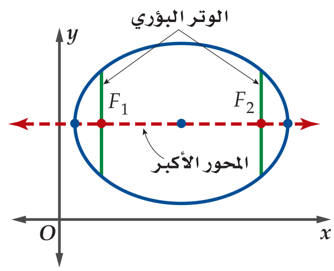
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0) , (-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1) , (0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

30) المركز $(2 , -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) **هندسة:** تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكِّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$

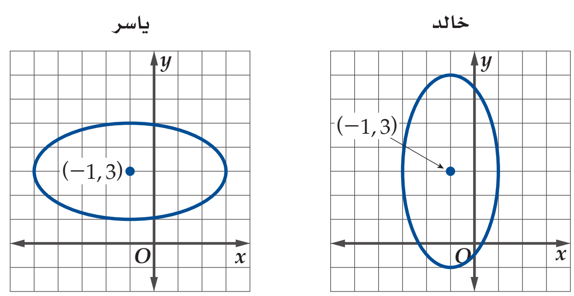
34) $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$

36) $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

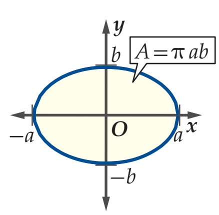
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1, \frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضِّح إجابتك.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:



39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي:
(الدرس 1-4)

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$

44) $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
(الدرس 5-3)

46) $\sin\theta = \cos\theta$

47) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$

48) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها.
(الدرس 7-1)

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مداها. (الدرس 1-2)

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$

C $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

D $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

اختبار منتصف الفصل

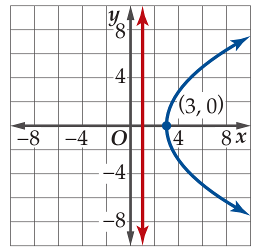
اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 1-4)

1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

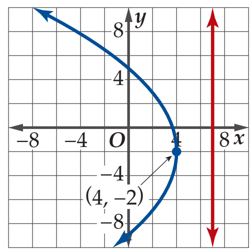
2) البؤرة $(5, -7)$، الرأس $(1, -7)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 1-4)

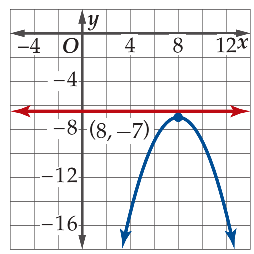
A



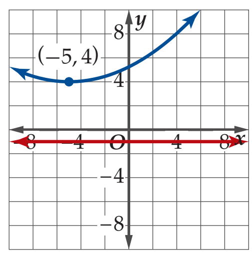
C



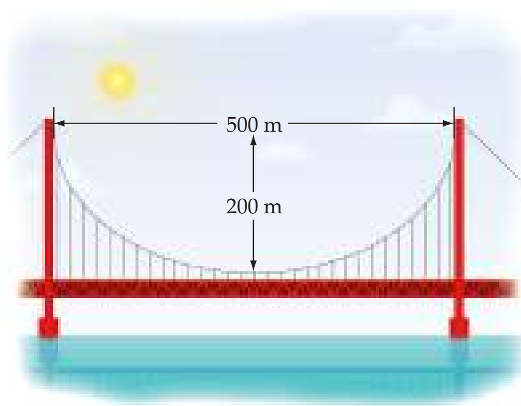
B



D



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثِّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 1-4)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-4)

5) $\dfrac{(x+4)^2}{81} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 2-4)

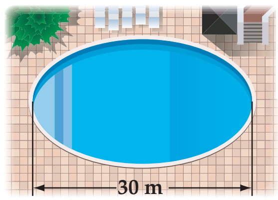
7) الرأسان $(-3, -3)$, $(9, -3)$ ، والبؤرتان $(-1, -3)$, $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$ ، والرأسان المرافقان $(-2, -7)$, $(4, -7)$.

10) الرأسان $(8, -9)$, $(8, 5)$ ، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

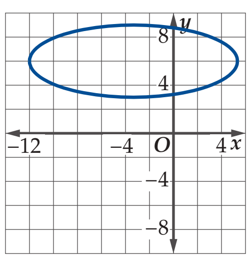
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68 . (الدرس 2-4)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثَّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 2-4)



A 17 وحدة

B 9 وحدات

C 6 وحدات

D 3 وحدات

4-3

القطوع الزائدة
Hyperbolas

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا.
(الدرس 2-4)

والآن:

- أحل معادلات القطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

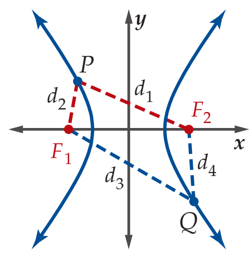
المحور المرافق
conjugate axis

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

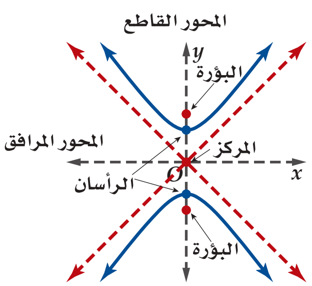
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

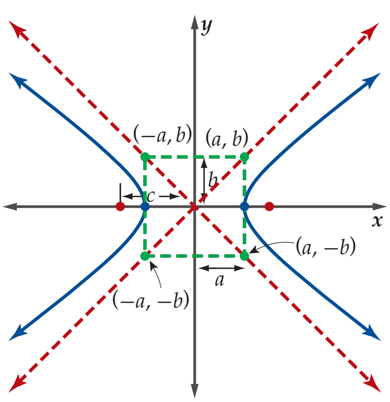


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



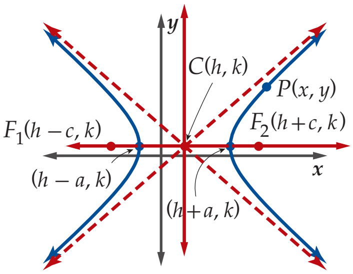
لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.



إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$
صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$$
خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$
اجمع

$$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2+4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$
ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين

$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2-4c(x-h)$$
بسّط

$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2+c(x-h)$$
اقسم الطرفين على -4 .

$$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2] = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$
ربّع الطرفين

$$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2 = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$
الخاصية التوزيعية

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^4-a^2c^2$$
بسّط

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$
الخاصية التوزيعية

$$-b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$
$a^2-c^2=-b^2$

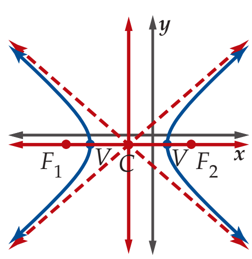
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

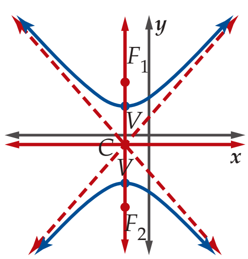
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

تنبيه!

عندما تمثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y، فإن اتجاه القطع رأسي.

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1,\ k = -2,\ a = \sqrt{9} = 3,\ b = \sqrt{16} = 4,\ c = \sqrt{9+16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: أفقي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

المركز: $(-1, -2)$ — (h, k)

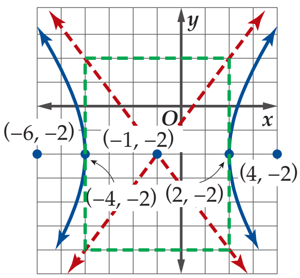
الرأسان: $(2, -2), (-4, -2)$ — $(h \pm a, k)$

البؤرتان: $(4, -2), (-6, -2)$ — $(h \pm c, k)$

خطا التقارب: $y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$ ، $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$ — $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \quad , \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$ ، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

1B) $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$$ المعادلة الأصلية

$$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$$ جمِّع الحدود المتشابهة

$$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$$ حلِّل

$$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$$ أكمل المربع

$$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$$ حلِّل وبسِّط

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$ اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = 3,\ k = -2,\ a = \sqrt{16} = 4,\ b = \sqrt{25} = 5,\ c = \sqrt{16+25} \approx 6.4 .$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

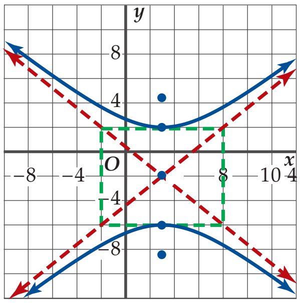
الرأسان: $(3, 2)\,,\,(3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4)\,,\,(3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)\quad ,\quad y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$ — $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

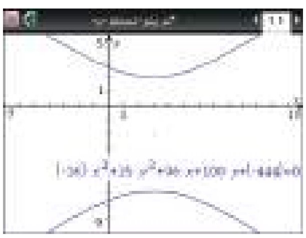
$$y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5}\quad ,\quad y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$ ، والبعد الآخر $2b = 10$ ، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

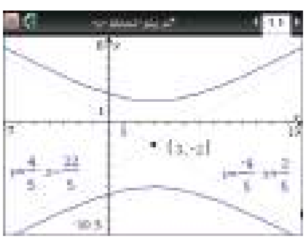


التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

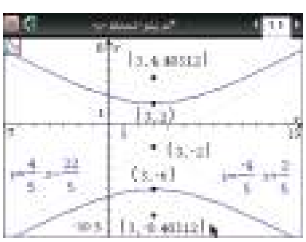
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح: menu ، esc ، on ثم اختيار
  3: إدخال / تحرير الرسم البياني ، 2: معادلة
  6: القطوع المخروطية ، 1



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu ، ثم اختيار
  6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية
  ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:
  1: المركز ، 6: الخطوط المقاربة ، 2: الرؤوس
  3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

✓ تحقق من فهمك

2A) $4y^2-9x^2-8y-36x=68$

2B) $2x^2-3y^2-12x-36=0$

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافيةً.

مثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3 -3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

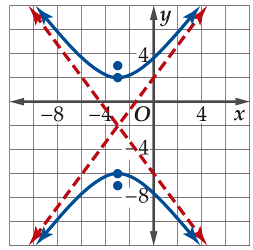
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = -2x + 12$, $y = 2x - 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3 -9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

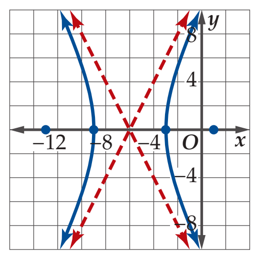
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بسِّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(12, -2)$, $(2, -2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c	$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$c^2 = 48 + 36$	$a^2 = 48, b^2 = 36$	$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$	$a = \sqrt{48}$ ،$c = \sqrt{84}$
$c = \sqrt{84}$	بسّط	≈ 1.32	بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(y-4)^2}{80} - \frac{(x+8)^2}{64} = 1$ **4B)** $\frac{(x+9)^2}{75} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

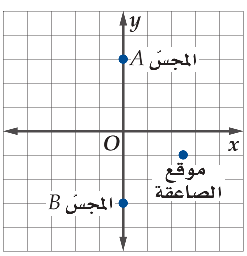
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

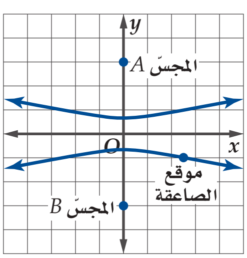
a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3^2 = 0.75^2 + b^2$	$c = 3 , a = 0.75$
$8.4375 = b^2$	بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y.

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \quad x = 2.5$$

$$y \approx \pm 0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًّا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(-100, 0), (100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1)

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2)

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13) البؤرتان $(-1, -7), (-1, 9)$، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5), (7, 5)$، والبؤرتان $(-9, 5), (11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3), (-1, 9)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

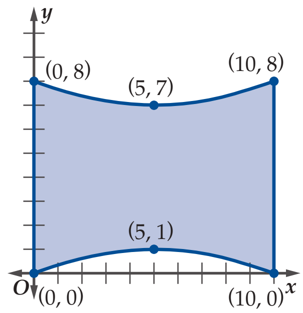
16) البؤرتان $(-17, 7), (9, 7)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, -2), (2, 10)$، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-1, -2), (13, -2)$.

20) هندسة معمارية: يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft ، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

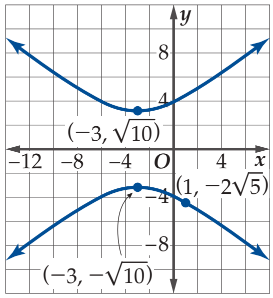
28) هندسة معمارية: يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m ، فما معادلة القطع الزائد؟

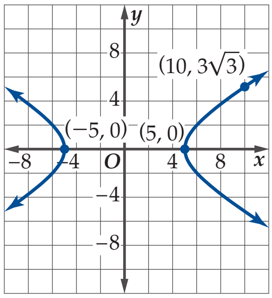
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m ، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m ، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًا في كل مما يأتي:

29)

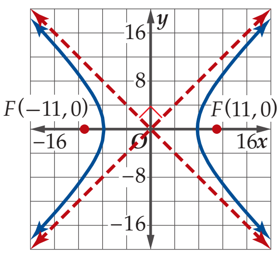


30)



31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكَّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيـًا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه .

b) **تحليليًا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيـًا:** مثل منحنيي القطعين في الفرع c.

e) **لفظيًا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) مسألة مفتوحة: اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) تبرير: افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) تبرير: افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) تحدٍّ: قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$, $F_2(0, -9)$، ويمر بالنقطة P. يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2. اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) برهان: يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) اكتب: صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-2)

40) $(x - 8)^2 + \frac{(y - 2)^2}{81} = 1$

41) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y + 5)^2}{49} = 1$

42) $\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 5)^2}{36} = 1$

43) مقذوفات: قُذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 4-1)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ. (الدرس 3-5)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$

تدريب على اختبار

47) مراجعة: يمثِّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$.

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية
Identifying Conic Sections

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

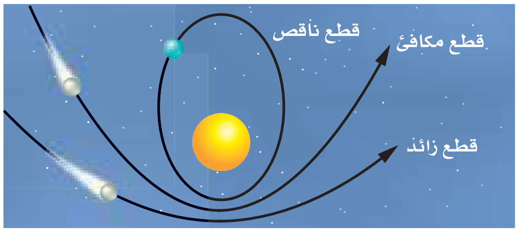
(الدروس من 1–4 إلى 3–4)

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثِّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية : يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ المعادلة الأصلية

$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$ حلّل وبسّط

$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$ مربع كامل

$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$ جمّع الحدود المتشابهة

$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$ أكمل المربع

$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$ حلّل وبسّط

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ اقسم كلا الطرفين على 16

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز B^2-4AC.

مراجعة المفردات

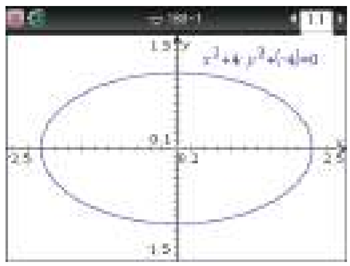
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو b^2-4ac.

مفهوم أساسي — تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2-4AC=0$
قطع ناقص	$B^2-4AC<0, A\neq C$ أو $B\neq 0$
دائرة	$B^2-4AC<0, B=0, A=C$
قطع زائد	$B^2-4AC>0$

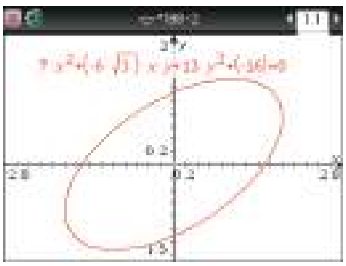
يكون القطع أفقيًّا أو رأسيًّا عندما $B=0$، أما إذا كانت $B\neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًّا ولا رأسيًّا.

قطع ناقص أفقي: $B=0$



$x^2+4y^2-4=0$

قطع ناقص ليس رأسيًّا ولا أفقيًّا : $B\neq 0$



$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2+4x^2-3xy+4x-5y-8=0$

$A=4, B=-3, C=1$

المميز يساوي $(-3)^2-4(4)(1)=-7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B\neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2-6x+4y-5y^2+2xy-4=0$

$A=3, B=2, C=-5$

المميز يساوي $2^2-4(3)(-5)=64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2-8x+6y-14=0$

$A=0, B=0, C=4$

المميز يساوي $0^2-4(0)(4)=0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2-6x^2+4xy-6x+2y-4=0$

2B) $3xy+4x^2-2y+9x-3=0$

2C) $3x^2+16x-12y+2y^2-6=0$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

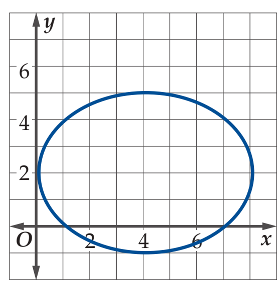
a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

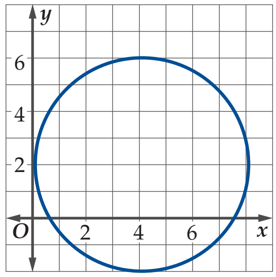
c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثِّل كلًّا منها:

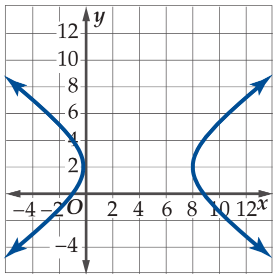
13)



14)



15)



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

قابل بين كل حالة في التمارين 19-16 مع المعادلة التي تمثِّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

16) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft .

17) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

18) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

19) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

20) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًّا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًّا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًّا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

21) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا.
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

22) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

23) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

مراجعة تراكمية

24) **فلك:** افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذَنّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثِّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3)

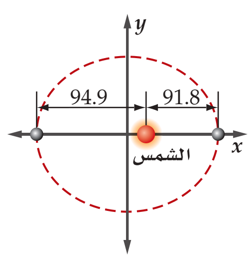
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2)

25) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

26) $4x^2 + 8y^2 = 32$

27) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

28) **فلك:** أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)



تدريب على اختبار

حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-4)

29) $\log_4 8n + \log_4 (n-1) = 2$

30) $\log_9 9p + \log_9 (p+8) = 2$

31) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

32) **اختيار من متعدد:** ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

معمل الحاسبة البيانية:
أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

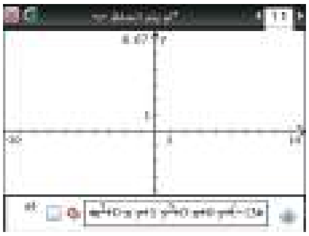
نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًّا

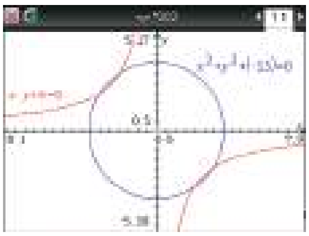
حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًّا:

$x^2 + y^2 = 13$

$xy + 6 = 0$

لحل المعادلتين بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:





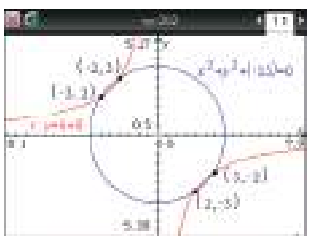
الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًّا.

- اضغط على المفاتيح:

menu esc on ثم اختيار 3: إدخال/ تحرير الرسم البياني
2: معادلة 6: القطوع المخروطية
1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.



- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$
$x = 1$

3) $x = 2 + y$
$x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$
$2x + y + 1 = 0$

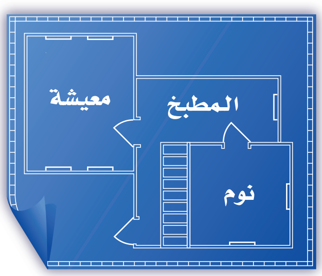
5) $y^2 = 9 - 3x^2$
$x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$
$4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًّا، وقدّر طول كل غرفة.



كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

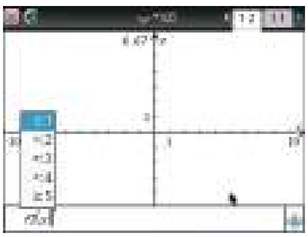
الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \leq \sqrt{36 - x^2}, y \geq -\sqrt{36 - x^2}$$

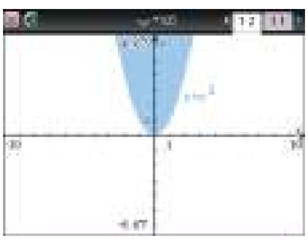
الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على (on) .

اختر من الشاشة الظاهرة 1 مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية



الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$، وذلك بالضغط على مفتاح (del)، ثم اختر رمز التباين $>$ مستعملاً الأسهم، فتظهر $y >$، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط (enter).

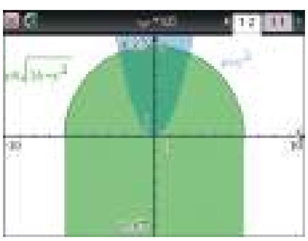


الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \leq \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح (tab) ثم المفتاح (del)، ثم اختر رمز التباين $\leq$ مستعملاً الأسهم، ستظهر $\leq y$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط (enter) ثم اضغط على المفتاح (tab) وتمثيل المتباينة $y \geq -\sqrt{36 - x^2}$، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:

(del) $>$ x^2 (enter) (tab) (del) $\leq$ (ctrl) (x^2) $36 - x^2$ (enter) (tab)

(del) $\geq -$ (ctrl) (x^2) $36 - x^2$ (enter)



لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \leq 36$$
$$y - x^2 > 0$$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح (menu)، ومنها اختيار 4: تغيير نطاق النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y: 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على (menu) (ctrl)، ثم اختيار B: اللون ومنها 1: لون السطر أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

8) $2y^2 \leq 32 - 2x^2$
$x + 4 \geq y^2$

9) $y + 5 \geq x^2$
$9y^2 \leq 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \leq 32$
$4x^2 + y^2 \leq 32$

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 4-1)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+c, k)$
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+c)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة .

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 4-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 4-3)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

المفردات

القطع المخروطي ص 172
المحل الهندسي ص 172
القطع المكافئ ص 172
البؤرة ص 172
الدليل ص 172
محور التماثل ص 172
الرأس ص 172
الوتر البؤري ص 172
القطع الناقص ص 180
البؤرتان ص 180
المحور الأكبر ص 180
المركز ص 180
المحور الأصغر ص 180
الرأسان ص 180
الرأسان المرافقان ص 180
الاختلاف المركزي ص 180
القطع الزائد ص 189
البؤرتان ص 189
المركز ص 189
الرأسان ص 189
المحور القاطع ص 189
المحور المرافق ص 189

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ________ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ________ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ________ القطع المكافئ عموديًّا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ________ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ________ يساوي مقدارًا ثابتًا .

6) ________ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ________ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لِـ ________ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 172 - 179)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

9) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

10) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

11) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

12) $F(1,1)\,,\,V(1,5)$

13) $F(-3,6)\,,\,V(7,6)$

14) $F(-2,-3)\,,\,V(-2,1)$

15) $F(3,-4)\,,\,V(3,-2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

16) $F(-4,-4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7,0)$

17) $F(-1,4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7,-2)$

18) $F(3,-6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9,2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2,1)$ ورأسه $(2,-3)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $1-(-3)=4$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

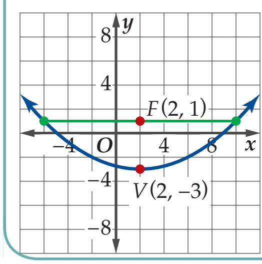
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k .

$4p(y-k)=(x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3)=(x-2)^2$ $p=4, k=3, h=2$

$16(y+3)=(x-2)^2$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2=16(y+3)$. مثِّل بيانيًا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 180 - 187)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

19) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

20) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

21) الرأسان $(3,-3)\,,\,(7,-3)$ ، والبؤرتان $(4,-3)\,,\,(6,-3)$.

22) البؤرتان $(9,2)\,,\,(1,2)$ ، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

23) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6,4)\,,\,(-4,4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1,7)\,,\,(1,1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

24) المركز $(-1,6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0,0)\,,\,(2,5)$.

26) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-2,-6)\,,\,(4,-2)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11,4)\,,\,(-9,4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1,-4)\,,\,(1,12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد $a\,,b$.

نصف طول المحور الأكبر: $a=\frac{11-(-9)}{2}=10$

نصف طول المحور الأصغر: $b=\frac{12-(-4)}{2}=8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h,k)=\left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$=(1,4)$ بسِّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-4)^2}{64}=1$$

دليل الدراسة و المراجعة

4-3 القطوع الزائدة (الصفحات 189 - 197)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

27) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

28) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

29) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

30) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

31) الرأسان $(-7, 0)$, $(7, 0)$، طول المحور المرافق 8.

32) البؤرتان $(0, -5)$, $(0, 5)$، والرأسان $(0, -3)$, $(0, 3)$.

33) البؤرتان $(1, -5)$, $(1, 15)$، وطول المحور القاطع 16.

34) الرأسان $(-2, 0)$, $(2, 0)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

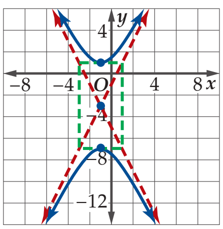
المركز: $(-1, -3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(-1, -3+2\sqrt{5})$ $(h, k \pm c)$
$(-1, -3-2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y + 3 = 2(x+1)$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
وَ $y + 3 = -2(x+1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 198 - 201)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

36) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$

37) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$

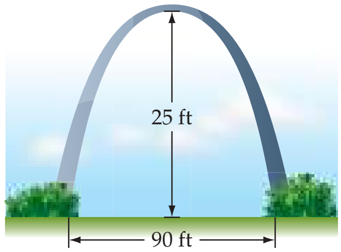
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

تطبيقات ومسائل

38) أقواس: يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 4-1)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

39) حركة الماء: أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$. بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

40) طاقة: تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 4-3)

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

41) ضوء: ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع. (الدرس 4-4)

اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(-3, -4)$, $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$, $(6, -4)$.

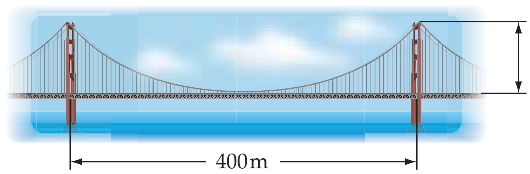
2) البؤرتان $(-2, -9)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

A -8 **C** 4

B -4 **D** 8

4) **جسور:** يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

5) الرأسان $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6) البؤرتان $(8, 8)$, $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$, $(8, 2)$

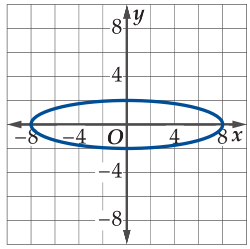
مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 وَ 8:

7) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

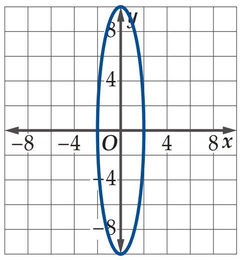
8) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

9) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

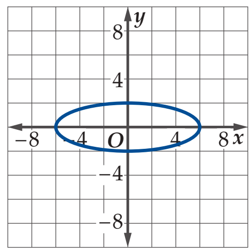
A



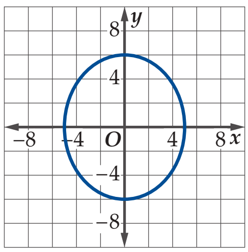
C



B



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا.

10) $F(2, 8)$, $V(2, 10)$

11) $F(2, 5)$, $V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

12) $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

13) $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

خاصية لوغاريتم القوة	$\log_b x^p = p\log_b x$	الربح المركب	$A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$
صيغة تغيير الأساس	$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات	$\log_b xy=\log_b x+\log_b y$
خاصية القسمة في اللوغاريتمات	$\log_b \frac{x}{y}=\log_b x-\log_b y$		

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2=4p(x-h)$ أو $(x-h)^2=4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ أو $x^2+y^2=r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\csc\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$		$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الصيغ

الهندسة الإحداثية

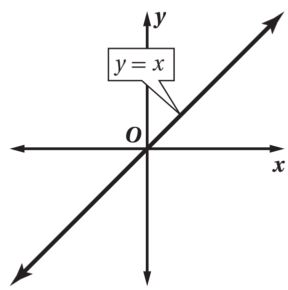
المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$		

كثيرات الحدود

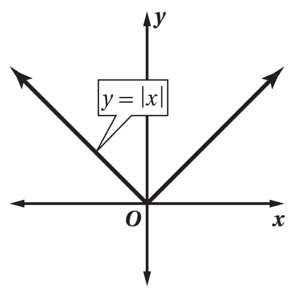
القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع الفرق	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
مربع المجموع	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

التمثيل البياني للدوال الرئيسة (الأم)

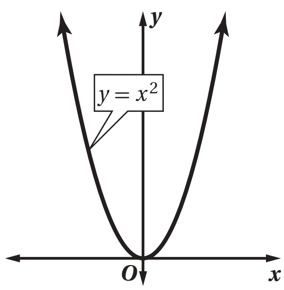
الدالة المحايدة



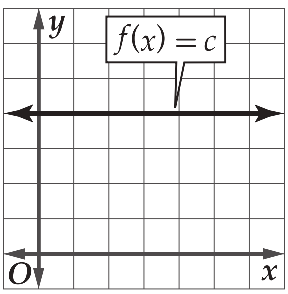
دالة القيمة المطلقة



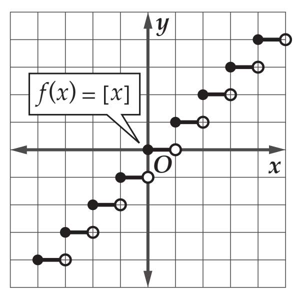
الدالة التربيعية



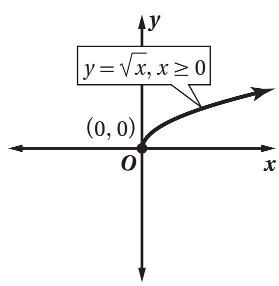
الدالة الثابتة



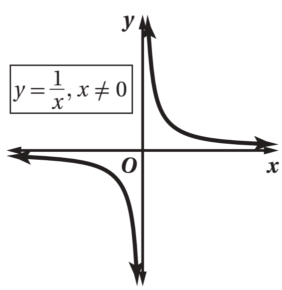
دالة أكبر عدد صحيح



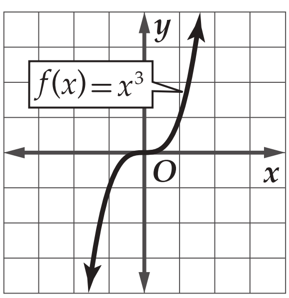
دالة الجذر التربيعي



دالة المقلوب



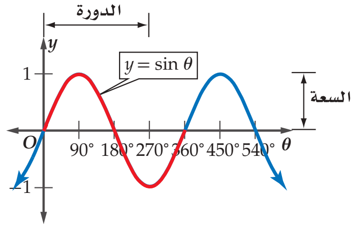
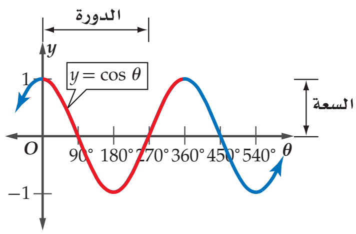
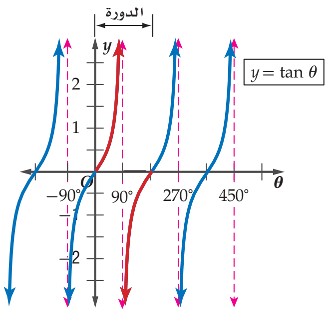
الدالة التكعيبية



قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

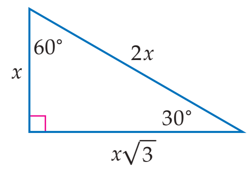
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tan θ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

التمثيل البياني للدوال المثلثية الأساسية

الدالة	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$	$y = \tan\theta$
التمثيل البياني			

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

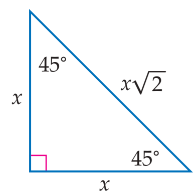
90°، 60°، 30°



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

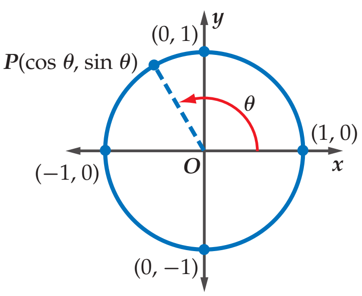
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\tan 60° = \sqrt{3}$

90°، 45°، 45°



$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45° = 1$

دوال في دائرة الوحدة



إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$،

فإن $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$، أي أن: $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x,y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

الرموز

النظير الضربي للمصفوفة A	A^{-1}
النظير الجمعي للمصفوفة A	$-A$
مصفوفة الوحدة	I
مضروب العدد الصحيح الموجب n	$n!$
المجموع	$\sum$
الحدث المتمم	A'
احتمال الحدث A	$P(A)$
احتمال B بشرط A	$P(B\|A)$
عدد تباديل n مأخوذة r في كل مرة	nPr
عدد توافيق n مأخوذة r في كل مرة	nCr
دالة الجيب	$\sin x$
دالة جيب التمام	$\cos x$
دالة الظل	$\tan x$
دالة مقلوب الظل	$\cot x$
دالة مقلوب الجيب	$\csc x$
دالة مقلوب جيب التمام	$\sec x$
دالة معكوس الجيب	$\sin^{-1} x$
دالة معكوس جيب التمام	$\cos^{-1} x$
دالة معكوس الظل	$\tan^{-1} x$

مجموعة الأعداد الحقيقية	R
مجموعة الأعداد النسبية	Q
مجموعة الأعداد غير النسبية	I
مجموعة الأعداد الصحيحة	Z
مجموعة الأعداد الكلية	W
مجموعة الأعداد الطبيعية	N
دالة f بمتغير x	$f(x)$
يساوي تقريبًا	$\approx$
الدالة المتعددة التعريف	$f(x) = \{$
دالة القيمة المطلقة	$f(x) = \|x\|$
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x) = [x]$
دالة بمتغيرين	$f(x, y)$
الوحدة التخيلية	i
تركيب الدالتين f وَ g	$[f \circ g](x)$
الدالة العكسية للدالة f	$f^{-1}(x)$
الجذر النوني لـ b	$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$
مصفوفة رتبتها $m \times n$	$A_{m\times n}$
العنصر في الصف i والعمود j من المصفوفة A	a_{ij}
محددة المصفوفة A	$\|A\|$
المجال	D
المدى	$\mathcal{R}$

رياضيات ٥

المحتويات

- الفصل الأول:

تحليل الدوال

- الفصل الثاني:

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

- الفصل الثالث:

المتطابقات والمعادلات المثلثية

- الفصل الرابع:

القطوع المخروطية

الاســم: ....

المدرسة : ....

رقم الإيداع: ١٤٣٩/٩٣٤٥

ردمك: ٠-٦٥٣-٥٠٨-٦٠٣-٩٧٨