المملكة العربية السعودية

وزارة التربية والتعليم

الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة الباحة

ثانوية السروات بالظفير (نظام المقررات)

أوراق عمل يومية لمادة الرياضيات ٤

((نظام المقررات))

معلم المادة / سعدي عبدالله ال فرحان

رياضيات ٤ ((ورق عمل)) { الوحدة الأولى }

١) ضرب العبارات النسبية وقسمتها :

بسط كل عبارة مما يأتي ، وحدد متى تكون غير معرفة :

1) $\frac{4x(x-3)(x+4)}{x(x^2-x-6)} =$ .....

2) $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)} =$ .....

2) ما قيم x التي تجعل العبارة التالية غير معرفة :

3) بسط كل من العبارات

$\frac{(x^2-5x-24)}{x^2-64}$	$\frac{c+d}{3c^2-3d^2}$	$\frac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{x-y}{y+7}}$
$\frac{27x^2y^5}{16z^4} \cdot \frac{8z^2}{9x^3y^3}$	$\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)} \div \frac{x^2-4}{4x-10}$	$\frac{x^2-y^2}{6y} \div \frac{x+y}{36y^2}$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١	أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{x^2-16}{x^2+x-20}$ هي.....			
	a) $\frac{x-4}{x-5}$	b) $\frac{x-4}{x+5}$	c) $\frac{x+4}{x+5}$	d) $\frac{x+4}{x-5}$
٢	الكسر المركب			
	a) كسر وحيد يمكن تبسيطه	b) يتكون بسطه ومقامه أو أحدهما من كسور	c) كسر مقامه من قوى العشرة	d) كسر مقامة العدد واحد

٢) جمع العبارات النسبية وطرحها :

1) أوجد LCM لكل مجموعة مما يلي :

- $8b^3c^4$,$15abc$,$12a^2b$
- $5x^3y$, $8x^2y^3$, $16x$
- a^3-9a^2+20a , $4a^2-12a-16$

2) بسط العبارات التالية :

$\frac{4}{5a^3b^2} + \frac{9c}{10ab}$	$\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$	$\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$
$\frac{4+\frac{2}{x}}{3-\frac{2}{x}}$		

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

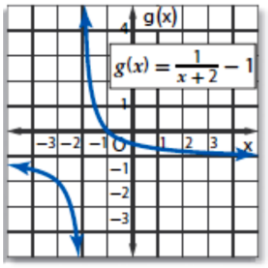
١	إذا كان : $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$ فإن قيمة a هي.....			
	a) $-\frac{1}{8}$	b) $\frac{1}{8}$	c) 2	d) $\frac{1}{2}$

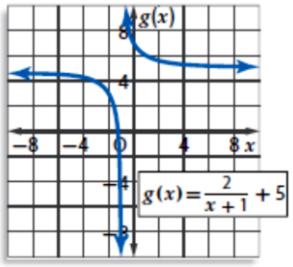
٣) تمثيل دوال المقلوب بيانياً :

- حدد قيمة x التي تجعل كل دالة مما يأتي غير معرفة :

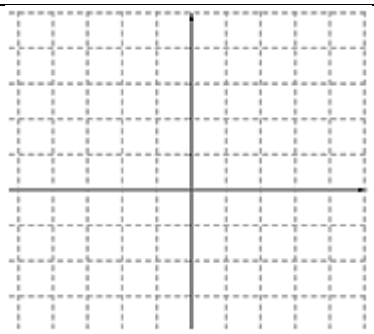
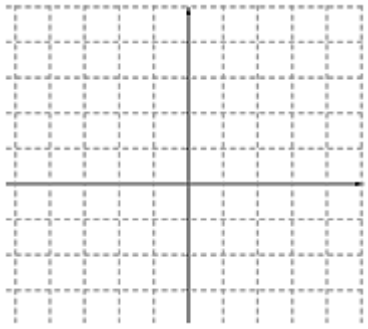
1) $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$ 2) $f(x)=\dfrac{7}{3x+2}$

- حدد خطوط التقارب ،والمجال ، والمدى :

1) 

2) 

- مثل الدالة التالية بيانياً ، وحدد مجالها ومداها :

1) $f(x)=\dfrac{-2}{x+4}+1$	
2) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}+2$	

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١	مجال الدالة $f(x)=\dfrac{8}{x+3}$			
	a) مجموعة الأعداد الحقيقية	b) مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة	c) مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -3	d) مجموعة الأعداد الحقيقة ما عدا 8
٢	خط التقارب الأفقي للدالة $f(x)=\dfrac{1}{x+4}+2$ عند النقطة			
	a) -4	b) $+2$	c) 1	d) محور x

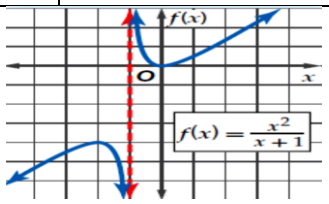
٤) تمثيل الدوال النسبية بيانياً :

	1) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$ مثل الدالة بيانياً
	2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$ مثل الدالة بيانياً

3) تستعمل إحدى الشركات الدالة $f(x)=\dfrac{13500\ x+250}{x+1}$ لحساب راتب موظف بعد x سنة من عمله لديها ، مثل هذه الدالة بيانياً .

وحدد القيم المنطقية لمجال الدالة ومداها في سياق المسألة ، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة ؟

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١	الدالة النسبية التي لا يوجد لها خط تقارب أفقي هي :			
	(a) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+1}{3x^2-3x+7}$	(b) $f(x)=\dfrac{2}{3x+7}$	(c) $f(x)=\dfrac{2x^4+5x+1}{3x^2-3x+7}$	(d) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-3x+1}$
٢	الرسم التالي يبين خط تقارب رأسي عند النقطة .... 			
	(a) 0	(b) -1	(c) 1	(d) -2
٣	دالة المقلوب من بين الدوال النسبية التالية هي :			
	(a) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+1}{3x^2-3x+7}$	(b) $f(x)=\dfrac{2}{3x+7}$	(c) $f(x)=\dfrac{2x^4+5x+1}{3x^2-3x+7}$	(d) $f(x)=\dfrac{5x+1}{x^2-3x+1}$
٤	للدالة : $f(x)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+3}$ نقطة انفصال عند			
	(a) 2	(b) -2	(c) 3	(d) -3

٥) دوال المتغير :

A. التغير الطردي : ($y = kx$ تتغير y طردياً مع x إذا وجد $k \neq 0$ ويسمى k ثابت التغير) $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (كلما زادت قيمة y زادت قيمة x بمقدار ثابت)	إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ فأوجد قيمة y عندما $x = 7$
B. التغير المشترك : ($y = k\ x\ z$ تتغير y تغيراً مشتركاً x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ويسمى k ثابت التغير) $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$	إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$ إذا علمت أن $y = 20$ عندما $z = 3$ و $x = 5$.
C. التغير العكسي : $y = \frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$ تتغير y عكسياً مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ($y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2$) (كلما زادت قيمة y نقصت قيمة x بمقدار ثابت)	إذا كانت a تتغير عكسياً مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$ ، فأوجد قيمة a عندما $b = -10$.
D. التغير المركب $y = \frac{kx}{z}$ تتغير y طردياً مع x بينما تتغير y عكسياً مع z ($\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$.	إذا كانت p تتغير طردياً مع r وعكسياً مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ و $r = 2$ فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$.

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي :

١	العلاقة التي في الجدول التالي تمثل تناسب			
	a) طردي	b) عكسي	c) مشترك	d) مركب
٢	العلاقة التي في الجدول التالي تمثل تناسب			
	a) طردي	b) عكسي	c) مشترك	d) مركب
٣	إذا كانت y تتغير طردياً مع x وكانت $y = -20$ عندما $x = 4$ فإن قيمة ..... = y عندما $x = -6$			
	a) 30	b) 120	c) -30	d) 60
٤	إذا كانت y تتغير تغيراً مشتركاً مع x و z فأوجد قيمة y عندما $x = 2$ و $z = 8$ إذا علمت أن $y = 70$ عندما $x = 10$ و $z = 4$.			
	a) 120	b) 700	c) 28	d) 80
٥	إذا كانت x تتغير عكسياً مع y وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$ فأوجد قيمة x عندما $y = 12$			
	a) 12	b) 8	c) 10	d) 6

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

x	y
8	2
4	4
-2	-8
-8	-2

ضع الرقم المناسب للعمود ب والمبين رقم الإجابة المناسبة للعمود ا :

	ا (المعادلة)		ب (نوع التغير)
١	$y = 27x$		تغير عكسي
٢	$y = \frac{6}{x}$		تغير مركب
٣	$y = \frac{3x}{z}$		تغير مشترك
٤	$y = 27x\ z$		تغير طردي

٦) حل المعادلات والمتباينات النسبية:

- حل المعادلات التالية :

1) $\frac{2x}{x+5}-\frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15}=\frac{3}{x+3}$	2) $\frac{5}{x-2}+2=\frac{17}{6}$
ركب سعيد قارباً بسرعة $6mi/h$ في المياه الراكدة وسار به بدون توقف مسافة $10mi$ نصفها في اتجاه التيار والنصف الآخر عكسه ، فاستغرق زمناً قدره $3h$ ، أوجد سرعة التيار .	يحتاج ناصر ومحمد إلى $6h$ لطلاء سور إذا عملا معاً . ويحتاج ناصر إلى $10h$ للقيام بالعمل وحده . فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده ؟
يحتاج علي إلى 3 أيام لبناء جدار الحديقة ويحتاج محمد إلى 6 أيام لإنجاز العمل نفسه فكم يوماً يحتاجون إليه لبناء الجدار معاً ؟	

حل كلاً من المتباينات والمعادلات التالية :

1) $\frac{5}{x}+\frac{6}{5x}>\frac{2}{3}$	2) $\frac{4}{3x}+\frac{7}{x}>\frac{5}{9}$	3) $\frac{1}{3}+\frac{4}{x-2}=6$

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان _____ فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن _____ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر _____ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{x}{x+2}$ له _____ عند $x = -2$.

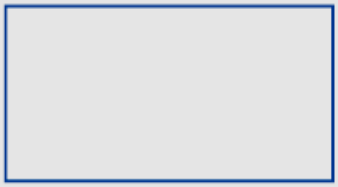
6) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود _____.

8) تظهر _____ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالة لأن الدالة غير معرفة عندها.

9) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

هندسة : أوجد محيط المستطيل في الشكل أدناه.



رياضيات ٤ ((ورق عمل)) { الوحدة الثانية }

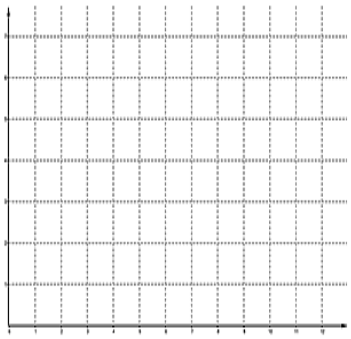
١) المتتابعات بوصفها دوال :

1) المتتابعة الحسابية :

١. بين إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي حسابية أم لا :

1) $7,12,16,20,\ldots\ldots$ 2) $-6,3,12,21,\ldots\ldots$

٢. أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية $18,11,4,\ldots\ldots$ ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانياً .



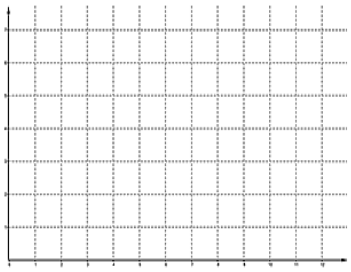
٣. يتقاضى علي لقاء عمله أجرة مقدارها 100 ريال يومياً، ويحصل على زيادة على أجرته اليومية مقدارها 5 ريالات كل 3 شهور فكم تصبح أجرته اليومية بعد مرور 3 سنوات ؟

2) المتتابعة الهندسية :

بين إذا كانت كل من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا :

1) $-8,\ 2,\ -0.5,\ 0.125,\ldots\ldots$ 2) $1,\ 3,\ 7,\ 15,\ldots\ldots$

٤. أوجد الحدين التاليين في المتتابعة الهندسية : $\ldots\ldots 63,\ 21,\ 7$ ، ثم مثل الحدود الخمسة الأولى بيانياً .



٥. حدد نوع المتتابعة إذا كانت حسابية ، أم هندسية أم غير ذلك . ووضح إجابتك:

6A) $\frac{5}{3},\ 2,\ \frac{7}{3},\ \frac{8}{3},\ldots\ldots$	6B) $2,\ -\frac{3}{2},\ \frac{9}{8},\ -\frac{27}{32},\ldots\ldots$	6C) $-4,\ 4,\ 5,\ -5,\ldots\ldots$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يأتي :

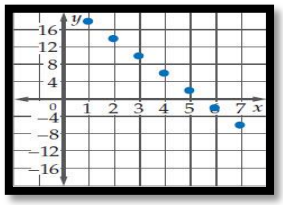
١ المتتابعة $3,6,9,12,15,\ldots\ldots$

a) حسابية اساسها -3 | b) حسابية اساسها 3 | c) هندسية اساسها 2 | d) هندسية اساسها -2

٢ المتتابعة $\frac{1}{16},\ \frac{1}{4},\ 1,\ 4,\ 16,\ldots\ldots$

a) حسابية اساسها $\frac{1}{4}$ | b) هندسية اساسها $\frac{1}{16}$ | c) حسابية اساسها 4 | d) هندسية اساسها 4

٣ الشكل المقابل يمثل المتتابعة



a) $1,2,3,4,\ldots\ldots$ | b) $4,6,8,10,12,\ldots\ldots$ | c) $-6,-2,2,6,\ldots\ldots$ | d) $18,14,10,6,\ldots\ldots$

٤ ((يوفر سعيد 250 ريال شهريا فإذا كان معه 1000 ريال في اول شهر)) فإن ما سبق يعبر عن متتابعة

a) حسابية حدها الاول 1000 | b) هندسية اساسها 250 | c) حسابية اساسها 1000 | d) هندسية حدها الاول 1000

٥ الحد التالي في المتتابعة الهندسية $8,6,\frac{9}{2},\frac{27}{8},\ldots\ldots$

a) $\frac{11}{8}$ | b) $\frac{9}{4}$ | c) $\frac{27}{16}$ | d) $\frac{81}{32}$

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

٢) المتتابعات والمتسلسلات الحسابية :

A. أوجد الحد المطلوب في كل من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

(1A a_n علماً بأن : $a_1 = -4,\ d = 6\ ,\ n = 9$ (1B a_{20} علماً بأن : $a_1 = 15,\ d = -8$

B. أكتب صيغة للحد النوني للمتتابعة الحسابية في كل مما يأتي :

(2A ....., 12 ,3 ,–6 (2B $a_6 = 12\ ,d = 8$

C. أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $-18,36$

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

المعطيات	مجموع أول n حدًا (S_n) هو :
$a_1\ ,\ a_n$	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$
$a_1\ ,\ d$	$S_n = \frac{n}{2}\,[2\,a_1 + (n-1)d]$

D. أوجد مجموع كل متسلسلة مما يأتي .

(4A $2+4+6+.....+100$ (4B $n = 16, a_n = 240, d = 8$.

E. أوجد الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعات الحسابية الآتية : $S_n = 120\ ,\ n = 8, a_n = 36$

رمز المجموع

الرموز :

$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ — صيغة حدود المتسلسلة — أول قيمة لـ k — آخر قيمة لـ k

مثال :

$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2] + [4(2)+2] + [4(3)+2] + \ldots + [4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

F. مجموع $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$ هو القيمة :

A 972 B 1053 C 1281 D 1701

١	الحد الثلاثون للمتتابعة الحسابية 9,16,23,30,..... هو			
	(a 219	(b 212	(c 205	(d 217
٢	مجموع المتسلسلة $2+4+6+.....+100$ هو			
	(a 2000	(b 2250	(c 2500	(d 2550
٣	$\sum_{k=1}^{12}(4k+2)$			
	(a 312	(b 360	(c 286	(d 336
٤	$\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$			
	(a 846	(b 910	(c 975	(d 1008
٥	متتابعة حسابية فيها $a_1 = 15, d = 8$ فإن a_{20} تساوي			
	(a 125	(b 175	(c 159	(d 167
٦	الحد النوني للمتتابعة الحسابية $12,3,-6,.....$			
	(a $-9n+21$	(b $9n+21$	(c $-3n+15$	(d $-9n-21$
٧	الوسط الحسابي بين العددين $4,16$			
	(a -10	(b 10	(c 12	(d 8
٨	الوسطين الحسابيين بين العددين $8,17$ هما			
	(a 10,12	(b 11,14	(c 9,13	(d 12,13

٣) المتتابعات والمتسلسلات الهندسية :

الحد النوني في المتتابعة الهندسية : يعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 وأساسها r بالصيغة الآتية :

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$ حيث n عدد طبيعي

A. **بريد إلكتروني :** أرسل سعيد رسالة إلى أربعة من أصدقائه باستعمال البريد الإلكتروني ، ثم قام كل منهم بدوره بإرسالها إلى أربعة أصدقاء آخرين ، وهكذا كان كل واحد يستلم الرسالة يبعثها إلى أربعة أصدقاء جدد . إذا استمر النمط ، فما عدد الأشخاص الذين سيستلمون الرسالة في المرحلة التاسعة (مع مراعاة أن كل شخص استلم رسالة واحدة) .

B. اكتب معادلة الحد النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين : $2A) -0.25,\ 2, -16,\ 128, \ldots\ldots$

$2B)\ a_3 = 16\ ,\ r = 4$

C. أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين : $512\ ,\ 0.5$.

مفهوم أساسي المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n	$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

D. أوجد مجموع كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين : $4A)\ a_1 = 2\ ,n = 10\ ,r = 3$ ،

$4B)\ a_1 = 2000\ ,\ a_n = 125\ ,r = \frac{1}{2}$.

E. أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الآتيتين : $5A)\ \sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

F. أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها : $S_n = -26240\ ,n = 8\ ,r = -3$

١	إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5 وأساسها 2 ومجموعها 1275 ، فما عدد حدودها .			
	a) 5	b) 7	c) 6	d) 8
٢	الأوساط الهندسية للمتتابعة : 324 , ... , ... , ... , 4			
	a) 24, 72, 216	b) 40, 120, 240	c) 12, 36, 108	d) لا شيء مما ذكر
٣	$\sum_{k=2}^{6} 3 \times 4^{k-1} = \ldots\ldots$			
	a) 3050	b) 4092	c) 4500	d) 3950

٤) المتسلسلات الهندسية غير المنتهية :

1) حدد أي المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة ، وأيهما متباعدة :

$2+3+4.5+.....(1A$ $100+50+25+.....(1B$

مفهوم أساسي **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية**

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُرمز له بالرمز S حيث $|r|<1$

ويعطى بالصيغة $S=\frac{a_1}{1-r}$

واذا كان $|r|\geq 1$ فلا يوجد للمتسلسلة مجموع.

2) أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين ، إن وجد : $.....+4-2+1-0.5$.

١	المتسلسلة الهندسية التالية $.....+16+20+25$			
	a) متقاربة ومجموعها 1025	b) متباعدة	c) متقاربة ومنتهية	d) ليست متقاربة ولا متباعدة
٢	قيمة $.....=\sum_{k=1}^{\infty}12(\frac{3}{4})^{k-1}$			
	a) 36	b) 30	c) 48	d) 64
٣	الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ يكتب ككسر اعتيادي على الصورة			
	a) $\frac{3}{11}$	b) $\frac{7}{33}$	c) $\frac{3}{33}$	d) $\frac{7}{11}$
٤	مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 27 وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :			
	a) 81	b) 65	c) 34	d) 18

٥) نظرية ذات الحدين :

1) إيجاد المفكوك باستعمال مثلث باسكال

$(a+b)^0$					1					
$(a+b)^1$				1		1				
$(a+b)^2$			1		2		1			
$(a+b)^3$		1		3		3		1		
$(a+b)^4$	1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5	1

فعلى سبيل المثال يكون:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

١) أوجد مفكوك $(c+d)^6$ بطريقة مثلث باسكال

نظرية ذات الحدين :

إذا كان n عدداً طبيعياً ، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\ a^nb^0 + {}_nC_1\ a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\ a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + {}_nC_n\ a^0b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k$$

٢) أوجد مفكوك $(c+d)^6$ باستخدام نظرية ذات الحدين (طريقة التوافيق).

٣) أوجد مفكوك $(x-2)^5$.

٤) أوجد الحد السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

١	${}_8C_5 = \ldots\ldots\ldots$			
	a) 2520	b) 21	c) 35	d) 56
٢	الحد الرابع في مفكوك $(a+b)^7$ هو			
	a) $35a^4b^3$	b) $35a^5b^2$	c) $35a^2b^5$	d) $21a^4b^4$
٣	في مفكوك ذات الحدين $(a+b)^9$ يكون عدد الحدود			
	a) 9	b) 10	c) 11	d) 12

٦) البرهان بالاستقراء الرياضي :

الاستقراء الرياضي : هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية .

ولبرهنة جملة ما صحيحية للأعداد الطبيعية حميعها n اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 : برهن أن الجملة صحيحة عندما $n=1$.
الخطوة 2 : افرض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يسمى فرضية الاستقراء.
الخطوة 3 : برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k+1$.

1) برهن أن : $1^3+2^3+3^3+.....+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$ **أي** $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$	$1^3=1 \quad and \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4}=\frac{1\times 2^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1$	**عندما** $n=1$	**الخطوة 1**
بفرض صحة العلاقة عندما $n=k$	$1^3+2^3+3^3+.....+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$	$n=k$	**الخطوة 2**
إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ ؟؟؟؟؟	$1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$	$n=k+1$	**الخطوة 3**
	الطرف الأيسر $=1^3+2^3+3^3+.....+k^3+(k+1)^3=$ $=\left[1^3+2^3+3^3+.....+k^3\right]+(k+1)^3$ $=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$ $=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4}$ $=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4(k+1)\right]}{4}$ $=\frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4}$ $=\frac{(k+1)^2\left[(k+2)(k+2)\right]}{4}$ **الطرف الأيمن** $=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$		
وهو المطلوب إثباته			

2) برهن أن : $1^2+2^2+3^2+.....+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الخطوة 1	عندما $n=1$		$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$
الخطوة 2	$n=k$		بفرض صحة العلاقة عندما $n=k$
الخطوة 3	$n=k+1$		إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ ؟؟؟؟؟
			وهو المطلوب إثباته

3) برهن أن : 7^n-1 يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1	عندما $n=1$		$\therefore$ العلاقة صحيحة عندما $n=1$
الخطوة 2	$n=k$		بفرض صحة العلاقة عندما $n=k$
الخطوة 3	$n=k+1$		إثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ ؟؟؟؟؟
			وهو المطلوب إثباته

4) أعط مثالاً مضاداً يبين خطأ الجملة :

$$1^2+2^2+3^2+.....+n^2=\frac{n(3n-1)}{2}$$

اختبار المفردات

حدّد إذا كانت كل من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدّل المصطلح الذي تحته خط لتصبح صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة غير المنتهية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) الاستقراء الرياضي هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلقة بالأعداد الطبيعية

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحد هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حد فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة 5, 11, 17, 23 .

9) باستعمال نظرية ذات الحدين فإن:
$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16.$

رياضيات ٤ ((ورق عمل)) { الوحدة الثالثة}

١) تمثيل فضاء العينة :

فضاء العينة لتجربة ما هو جميع النواتج المكنة ، ويمكن تمثيله باستعمال: القائمة المنظمة – الجدول – الرسم الشجري .

(١ ألقيت قطعة نقد مرة واحدة ، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً . مثل فضاء العينة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة ، الجدول ، والرسم الشجري .

(٢ يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال ، ويمكنه أن يختاره بلون فضي (S) أو أسود (B) أو أحمر (R) ، وأن يكون بكامرا (C) أو بدونها (NC) .ويكنه أن يحصل عل سماعات (H) أو غطاء للجهاز (W) . مثل فضاء العينة لهذا الموقف بالرسم الشجري .

(٣ أوجد عدد النواتج المكنة في الحالات الآتية:

A. اختبار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور .

B. رمي مكعب مرقم أربع مرات .

C. أحذية : اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات : 39,40,41,42,43,44,45 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض ، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي ، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء .

١ عندما يضرب اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفاً (G) أو لا يسجل (0) . بافتراض أن اللاعب ضرب ركلة الجزاء مرتين فإن عدد النواتج المكنة لفضاء العينة = ...

a) 2 b) 1 c) 4 d) 8

٢ فضاء العينة للتجربة :سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها : (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N)

a) $N, N-J, J-N, J-J, N$ b) $N, N-J, J$ c) N, J d) $N, J-J, N$

٣ عرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم كما في الجدول التالي ، فما عدد النواتج المكنة

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيسي	12
الحلوى	9

a) 20736 b) 39 c) $8\times4\times6+12+9$ d) لا شيء مما ذكر

٢) الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق :

* التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهماً . يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots \cdot 2 \times 1 \quad \text{ويعرف} \quad 0\ ! = 1$$

A. نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي . إذا كان عدد أعضاء الفريق 20 ويرتدي كل منهم قميصاً مرقماً من (1) إلى (20) بشكل عشوائي ، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1) ، ورقم قميص ماجد (2) ؟

* يرمز إلى عدد تباديل n من العناصر المتمايزة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $ {}_nP_r = \dfrac{n\ !}{(n-r)\ !}$

مثال . (عدد تباديل 5 عناصرها مأخوذة 2 في كل مرة يساوي) $ {}_5P_2 = \dfrac{5\ !}{(5-2)\ !} = \dfrac{5 \times 4 \times 3\ !}{3\ !} = 20$

B. يتكون مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة ، ما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيساً ، ونائباًللرئيس ، وأميناً للسر على الترتيب ، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائياً ؟

C. تستعمل الأرقام $1-9$ دون تكرر ، لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل . 1) ما عدد البطاقات الجامعية المكنة ؟

2) اختيرت بطاقات جامعية عشوائياً ، ما احتمال أن تحمل أحد الرقمين : 42135976 , 67953124

* التباديل مع التكرار : عدد التباديل المتمايزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ..... فإنه يساوي $\dfrac{n\ !}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots\ldots r_k!}$

D. ما احتمال أن يكون 55652113 رقماً لهاتف مكون من 8 أرقام هي $5,1,6,5,2,1,5,3$.

* عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة دون نقطة مرجع ثابتة يساوي : $\dfrac{n\ !}{n} = (n-1)\ !$.

E. تجمع فريق كرة قدم مكون من 11 لاعباً على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة .

i. ما احتمال أن يقف قلب الهجوم إلى يمين حارس المرمى مباشرة ، إذا تجمع الفريق بشكل عشوائي ؟ وضح تبريرك .

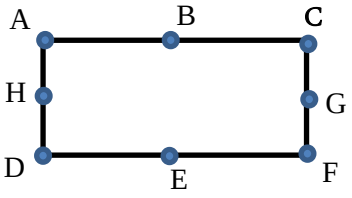
ii. إذا وقف حكم المباراة تماماً خلف أحدهم ، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى ؟ وضح تبريرك .

* التوافيق : هي تنظيم العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم .

* التوافيق : يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز $ {}_nC_r$ حيث $ {}_nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

مثال : توافيق 8عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي :

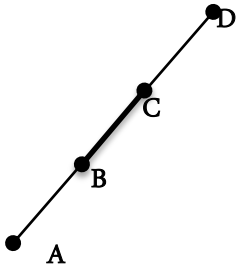
$$ {}_8C_3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$



إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة

٣) الاحتمال الهندسي :

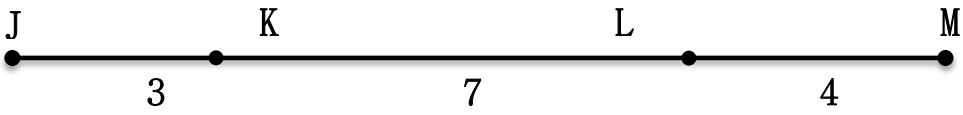
* الاحتمال الهندسي : احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون . ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياساً هندسياً



مثل الطول أو المساحة (احتمال هندسي)

* الاحتمال والطول : إذا اختيرت النقطة E على $\overline{AD}$ عشوائياً فإن : P ($\overline{BC}$ على E تقع) $= \frac{BC}{AD}$

A. إذا اختيرت X عشوائياً على $\overline{JM}$ فأوجد احتمال أن تقع X على كل مما يلي :



1A) P ($\overline{LM}$ على X تقع)

1B) P ($\overline{KM}$ على X تقع)

B. يحضر مطعم الشاي في وعاء سعته $8L$ ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن $2L$ يصبح تركيز الشاي كبيراً ويختلف طعمه .

١) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي ، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى $2L$

٢) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أي وقت بين $2L$ و $3L$ ؟

C. يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز . إذا كان قطر الدائرة الداخلية $2m$ ويزداد نصف القطر كل دائرة تالية بمقدار $1m$ ، فما احتمال : ١- (أن يهبط المظلي في الدائرة الداخلية) P

٢- (أن يهبط المظلي في الدائرة الثانية) P

٣- (أن يهبط المظلي في الدائرة الخارجية) P

استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كل مما يأتي :

a) (استقرار المؤشر على اللون الأصفر) P

b) (استقرار المؤشر على اللون البنفسجي) P

c) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق) P

d) (عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر) P

e) (استقرار المؤشر على اللون الأزرق) P

٤) احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة :

الحادثة المركبة : هي حادثة مركبة من حادثتين بسيطتين أو أكثر .

الحوادث المستقلة : تكون حادثتين مستقلتين إذا كان احتمال حدوث أحدهما لا يؤثر على الآخر .

الحوادث غير المستقلة : تكون حادثتين غير مستقلتين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يغير بطريقة ما احتمال حدوث الأخرى .

* حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كل مما يلي :

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة . .....

b) اختير اسم أحد الطلبة من فصل عشوائياً دون إرجاع ثم اختير اسم طالب آخر . .....

c) سحب كرة واحدة عشوائياً من كلا صندوقين مختلفين . .....

d) سحبت بطاقة من مجموعة بطاقات ، ثم أعيدت إلى المجموعة ، ثم سحبت بطاقة ثانية . .....

e) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ، ثم رمي مكعب مرقم مرة واحدة أيضاً . .....

* احتمال حادثتين مستقلتين : إذا كانت A, B مستقلتين فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2A) إذا ألقيت قطعة نقد ورمي مكعب مرقم مرة واحدة ، فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

.....

2B) إذا ألقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية ، فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات ؟

.....

* احتمال حادثتين غير مستقلتين : إذا كانت A, B غير مستقلتين فإن $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولاً ، وهذا يسمى الاحتمال المشروط .

٣) يحتوي صندوق على 52 بطاقة ، منها 13بطاقة زرقاء مرقمة من 1 إلى 13 وبالمثل 13بطاقة حمراء و 13صفراء و13خضراء . ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع ؟

.....

* إذا رمي مكعب أرقام مرة واحدة وعلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي ، فما احتمال أن يكون العدد 5؟

.....

٤) عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9 ؟

A $\frac{1}{6}$ $\quad$ B $\frac{1}{4}$ $\quad$ C $\frac{1}{3}$ $\quad$ D $\frac{1}{2}$

* الاحتمال المشروط : الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو $(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ حيث $P(A) \neq 0$

.....

٥) احتمالات الحوادث المتنافية :

* الحوادث المتنافية هي التي لا يمكن أن تقع في الوقت نفسة فحدوث أحدهما يلغي حدوث الأخرى في ذلك الوقت (أي أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما).

A. حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتان أم غير متنافيتين في كل مما يأتي وبرر إجابتك :

a) المسؤول من الصف الثاني أو من الصف الثالث الثانوي . .....

b) المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م . .....

c) اختيار عدد عشوائياً من الأعداد من 1 إلى 100 والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 . .....

d) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7 ، عند رمي مكعبين مرقمين متمايزين مرة واحدة . .....

في الحوادث المتنافية : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

A٢. إذا رمي مكعبان مرقمان متمايزان مرة واحدة فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كل من وجهي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

.....

B٢. إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر فسيمنح جائزة ، إذا اختيرت الجائزة عشوائياً من بين 15محفظة ،و16 ساعة و 14 نظارة و25 قلماً و10 كرات ، فما احتمال أن يمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة ؟

.....

* الحوادث غير المتنافية : إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتان فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً .

أي أن ($P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$)

B. مجموعة بطاقات عددها 52 مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية : الأحمر ، الأسود، الأزرق ، الأصفر ، ورقمت بطاقات كل لون من 1 إلى 13 . ما احتمال سحب بطاقة تحمل الرقم 7 ، أو بطاقة حمراء من هذه المجموعة ؟

.....

* احتمال الحادثة المتممة : تعبر عن احتمال عدم وقوع حادثة (أي مكملة الحادثة) فيكون : $P(A') = 1 - P(A)$

C. اشترك قيس في مسابقة ثقافية ، وطلب منه سحب بطاقة عشوائياً من صندوق به 300 بطاقة ، منها 20 بطاقة رابحة ، ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة ؟

.....

إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله ؟ .....

قوانين الاحتمال

نوع الحوادث	التعبير اللفظي	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن $P(A \text{ و } B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A\|B) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(B)}$
الحوادث المتنافية	حوادث لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B)$
الحوادث غير المتنافية	حوادث توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن $P(A \text{ أو } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ و } B)$
الحوادث المتمّمة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأي حادثة A ، $P(A') = 1 - P(A)$

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة .

8) ألقى يوسف قطعة نقد 200 مرة لتكوين شجرة احتمال للتجربة.

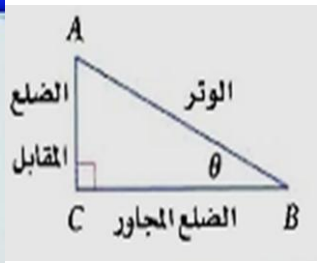
9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

رياضيات ٤ ((ورق عمل)) { الوحدة الرابعة}

١) الدوال المثلثية في المثلثات القائمة الزاوية :

مفهوم أساسي

الدوال المثلثية في مثلث قائم الزاوية



التعبير اللفظي: إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور.

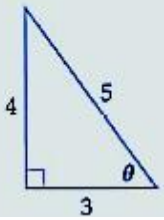
الرموز:

$$\sin\theta\ (\theta \text{ جيب}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \qquad \csc\theta\ (\theta \text{ قاطع تمام}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos\theta\ (\theta \text{ جيب تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \qquad \sec\theta\ (\theta \text{ قاطع}) = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta\ (\theta \text{ ظل}) = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \qquad \cot\theta\ (\theta \text{ ظل تمام}) = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

أمثلة:



$$\sin\theta = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\csc\theta = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{3}{4}$$

1) إذا كانت θ تمثل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية ، أوجد قيم الدوال المثلثية الست للزاوية θ إذا كان : طول الضلع المقابل للزاوية θ : $(BC) = 8$ ، طول الضلع المجاور للزاوية θ : $(AC) = 15$ ، طول الوتر : $(AB) = 17$

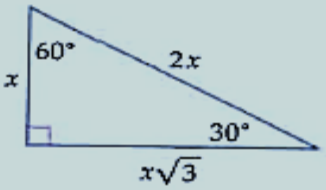
2) إذا كان $\tan B = \frac{3}{7}$ ، فأوجد قيمة $\sin B$.

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

30°—60°—90°

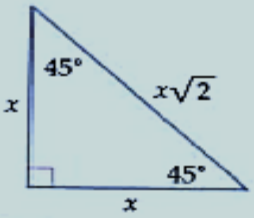
$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan 60° = \sqrt{3}$$



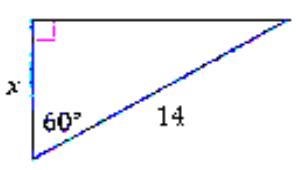
45°—45°—90°

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan 45° = 1$$

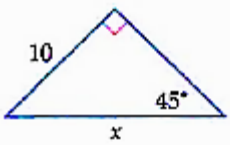


3)استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم :

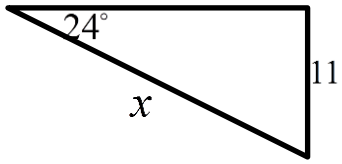
(3A



(3B



4) استعمل دالة مثلثية لإيجاد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم .



مفهوم أساسي

معكوس النسب المثلثية

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيبها يساوي x، فإن: معكوس جيب x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\sin A = x$، فإن: $m\angle A = \sin^{-1} x$.

مثال: $\sin A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin^{-1} \frac{1}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 30°$

التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وجيب التمام لها يساوي x، فإن: معكوس جيب تمام x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\cos A = x$، فإن: $m\angle A = \cos^{-1} x$.

مثال: $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 45°$

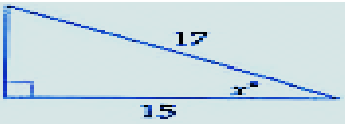
التعبير اللفظي: إذا كانت $\angle A$ زاوية حادة وظلها يساوي x، فإن: معكوس ظل x هو قياس $\angle A$.

الرموز: إذا كان $\tan A = x$، فإن: $m\angle A = \tan^{-1} x$.

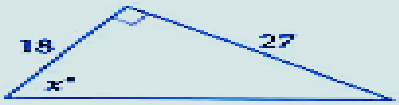
مثال: $\tan A = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1} \sqrt{3} = m\angle A \rightarrow m\angle A = 60°$

5) أوجد قيمة x ، قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم .

(5A



(5B

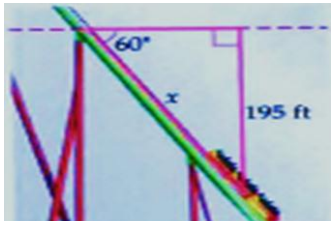


في الشكل إلى اليسار، تُسمّى الزاوية المحصورة بين خط نظر السابح إلى المنقذ والخط الأفقي **زاوية الارتفاع**. كما تُسمّى الزاوية المحصورة بين خط نظر المنقذ إلى السابح والخط الأفقي **زاوية الانخفاض**.

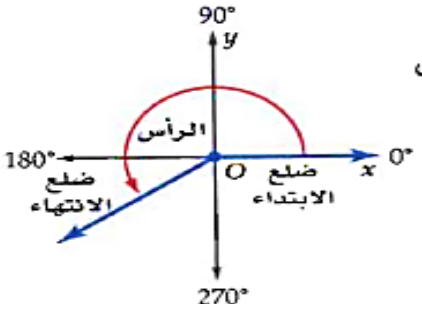
6A) لعبة الجولف : يقف لاعب جولف أسفل تل وينظر إلى الحفرة في القمة . إذا كان ارتفاع التل $36\ ft$ ، وزاوية ارتفاع التل عن الحفرة 12° ، أوجد المسافة من أسفل التل إلى الحفرة .

6B) زاوية انحدار (انخفاض) جزء من مسار عربة دوارة في إحدى مدن الألعاب هي 60° .

وينحدر هذا المسار من ارتفاع رأسي مقداره $195\ ft$. قدر طول هذا الجزء من المسار .



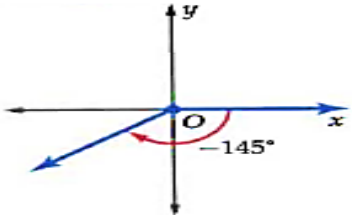
٢) الزوايا وقياساتها :

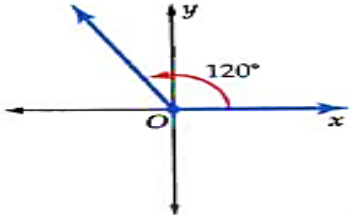


الزوايا المرسومة في الوضع القياسي تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في **الوضع القياسي** إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x.

- يُسمّى الضلع المنطبق على المحور x **ضلع الابتداء** للزاوية.
- يُسمّى الضلع الذي يدور حول نقطة الأصل **ضلع الانتهاء**.

قياسات الزوايا





إذا كان قياس زاوية موجبًا، يكون ضلع الانتهاء قد دار بعكس حركة عقارب الساعة.

وإذا كان قياس زاوية سالبًا، يكون ضلع الانتهاء قد دار مع حركة عقارب الساعة.

1) ارسم كلاً من الزاويتين المعطى قياسهما فيما يأتي في الوضع القياسي :

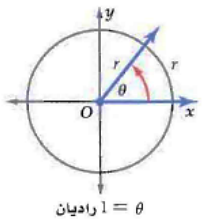
1A. 80°	1B. -105°

2) ارسم زاوية قياسها 600° في الوضع القياسي .

3) في كل مما يأتي أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركين في ضلع الانتهاء

3A. 15°	3B. -45°

الراديان *Rad*



الراديان هو قياس الزاوية بوحدات تستند على طول القوس حيث أن قياس الزاوية θ المرسوم بالدائرة والتي يكون فيها طول القوس مساوٍ لطول نصف قطر الدائرة .أي أن : $\theta = 1\ Rad$

قوانين تحويل الزوايا

١) من درجات إلى راديان:

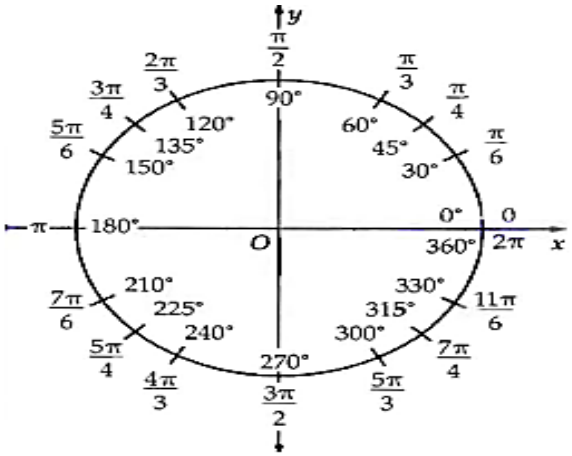
الزاوية بالراديان= $\frac{\pi}{180^\circ} \times x^\circ$

٢) من راديان إلى درجات :

الزاوية بالدرجات = $\frac{180^\circ}{\pi} \times R$

4) حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى راديان ، والمكتوبة بالراديان إلى درجات

4A. -30°	4B. $\frac{5\pi}{2}$	4C. 120°	4D. $-\frac{3\pi}{8}$



القياس بالدرجات وبالراديان

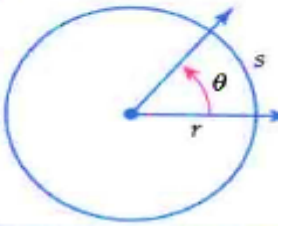
يُظهر الشكل المجاور قياسات الزوايا الخاصة بالدرجات وبالراديان.

من المفيد أن تحفظ قياسات الزوايا الخاصة الآتية بالدرجات وبالراديان؛ فقياسات الزوايا الخاصة الأخرى ما هي إلا مضاعفات لقياسات هذه الزوايا.

$30° = \frac{\pi}{6}$ $\quad 45° = \frac{\pi}{4}$

$60° = \frac{\pi}{3}$ $\quad 90° = \frac{\pi}{2}$

النموذج



طول القوس من الدائرة (S) ، المقابل لزاوية مركزيه قياسها (θ) يساوي حاصل ضرب نصف القطر r في θ.

$$s = r\theta$$

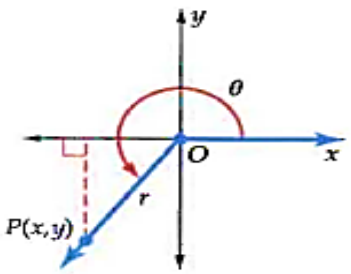
* **** ملاحظة : يجب أن يكون قياس الزاوية θ مقاسة بالراديان ***

5) إذا كان قطر دائرة $9cm$ ، فأوجد طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله 60° . قرب إلى أقرب جزء من عشرة .

5A.

٣) الدوال المثلثية للزوايا :

الدوال المثلثية للزوايا

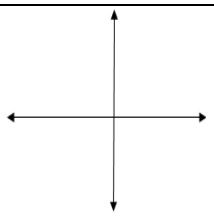


لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي ولتكن النقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء لها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد قيمة r $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. فتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

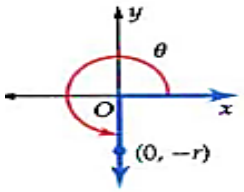
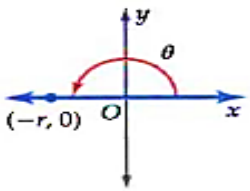
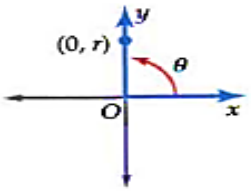
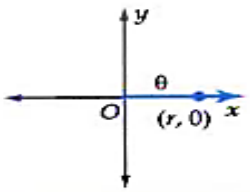
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$

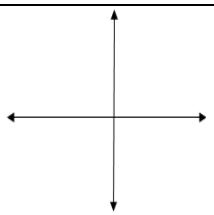
1) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-6,2)$ فأوجد القيم الدقيقة للدوال المثلثية الست للزاوية θ



الزوايا الربعية

$\theta = 270°$ أو $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad	$\theta = 180°$ أو $\theta = \pi$ rad	$\theta = 90°$ أو $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad	$\theta = 0°$ أو $\theta = 0\ rad$
			

2) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يمر بالنقطة $(-2,0)$ فأوجد قيم الدقيقة الدوال المثلثية الست للزاوية θ

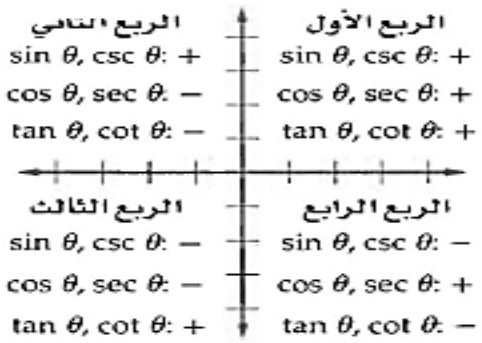


إيجاد قيم الدوال المثلثية

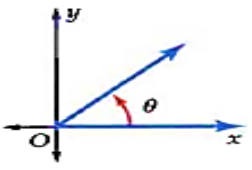
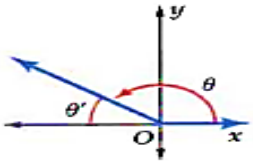
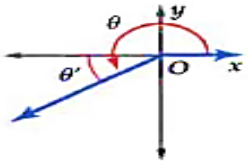
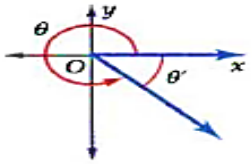
الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ'.

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ'.

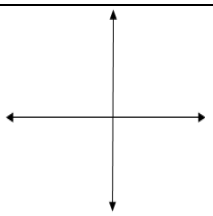
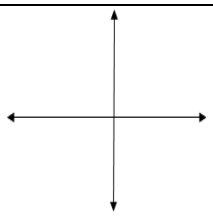
الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .



الزوايا المرجعية

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
			
$\theta' = \theta$	$\theta' = 180° - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180°$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 360° - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$

3) ارسم كلاً من الزاويتين الآتيتين في الوضع القياسي ، ثم أوجد الزاوية المرجعية لها :

3A. -110°	
3B. $\frac{2\pi}{3}$	

قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

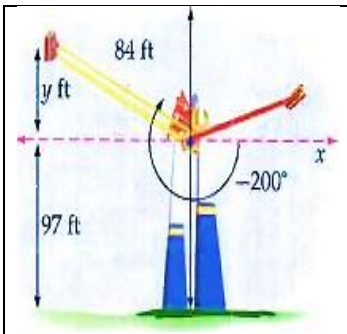
الجيب	جيب التمام	الظل	قاطع التمام	القاطع	ظل التمام
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\csc 30° = 2$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$
$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45° = 1$	$\csc 45° = \sqrt{2}$	$\sec 45° = \sqrt{2}$	$\cot 45° = 1$
$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sec 60° = 2$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4) أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي :

4E. $\cos 135^\circ$	4F. $\tan \frac{5\pi}{6}$

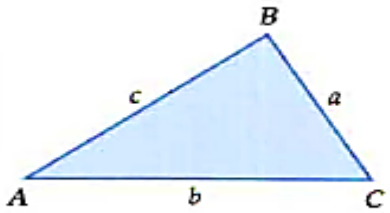
5) إذا كان طول كل ذراع من أذرع الأرجوحة في الشكل المجاور $84\ ft$ ، وارتفاع محور الدوران $97\ ft$ أوجد :

A٥. الارتفاع الكلي لنهاية الذراع الأيسر في الصورة عندما يدور كما هو واضح في الشكل .



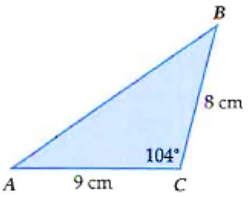
٤) قـانون الجيـوب :

مسـاحة المثلث



التعبير اللفظي: مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طولي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

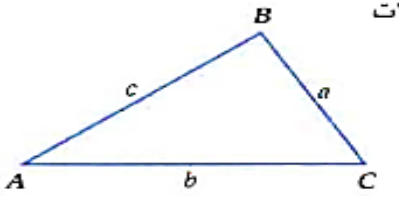
الرموز: المساحة $= \frac{1}{2} bc \sin A$ المساحة $= \frac{1}{2} ac \sin B$ المساحة $= \frac{1}{2} ab \sin C$

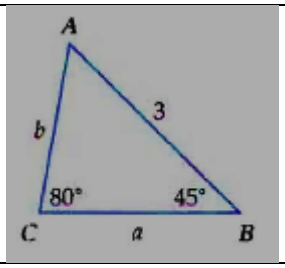
أوجد مساحة ΔABC مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة .	
أوجد مساحة ΔABC الذي فيه : $A = 31^\circ, b = 18m, c = 22m$ مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة .	

قانون الجيوب

إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

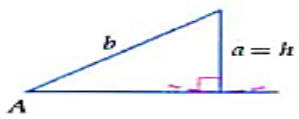


حل ΔABC قرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم .	

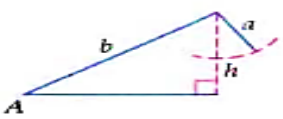
المثلثات الممكنة في حـالة (SSA)

افترض مثلثًا معلومًا فيه: $m\angle A, a, b$

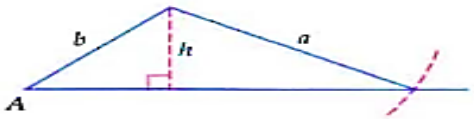
$\angle A$ حادة



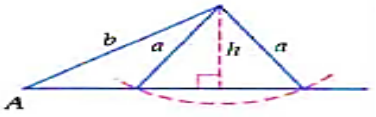
$a = h$
حل واحد



$a < h$
لا يوجد حل



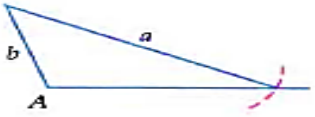
$a \geq b$
حل واحد



$h < a < b$
حلان

$\angle A$ قائمة أو منفرجة

$a \leq b$
لا يوجد حل



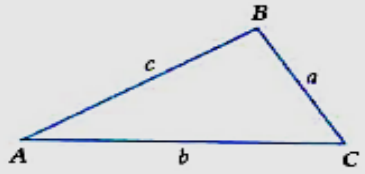
$a > b$
حل واحد

حدد إن كان لكل مثلث مما يأتي حل واحد ، أم حلان ، أم ليس له حل ، أوجد الحلول ، مقرباً أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة ، والزوايا إلى أقرب درجة .

3A. ΔRST.....$R = 95^\circ, r = 10, s = 12$	3B. ΔMNP.....$N = 32^\circ, n = 7, p = 4$
3C. ΔABC.....$A = 47^\circ, a = 15, b = 18$	

٥) قـانون جيــوب التمام :

قانون جيوب التمام



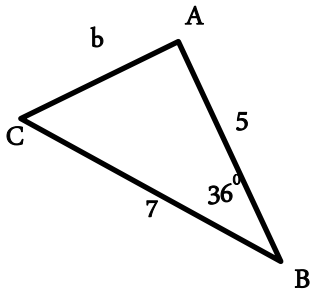
إذا كانت أضلاع ΔABC التي أطوالها: a, b, c تقابل الزوايا ذات القياسات A, B, C ، على الترتيب، فإن العلاقات الآتية تكون صحيحة:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

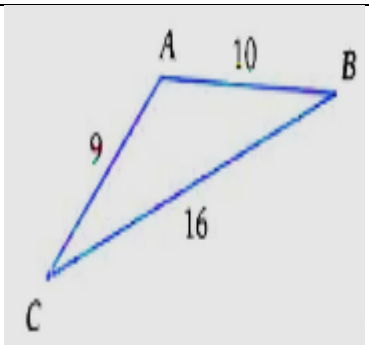
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

حل ΔABC مقرباً طول الضلع إلى أقرب جزء من عشرة ، وقياسي الزاويتين إلى أقرب درجة .



حل ΔABC مقرباً قياسات الزوايا إلى أقرب درجة .



ملخص المفهوم — حل المثلثات غير القائمة الزاوية

إذا أعطيت	أبدأ الحل باستعمال
قياسي زاويتين وطول أي ضلع	قانون الجيوب
طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما	قانون الجيوب
طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	قانون جيوب التمام
أطوال الأضلاع الثلاثة	قانون جيوب التمام

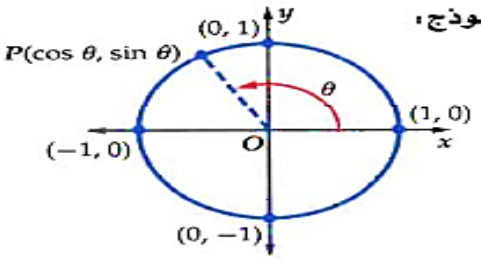
ركض سعيد مسافة $6Km$ في اتجاه معين . ثم انعطف بزاوية قياسها 79° ، وركض مسافة $7Km$ ، ما المسافة بين النقطة التي بدأ منها سعيد الركض والنقطة التي وصل إليها ؟

٦) الدوال الدائرية :

دوال في دائرة الوحدة

التعبير اللفظي: إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$، فإن $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$

النموذج:

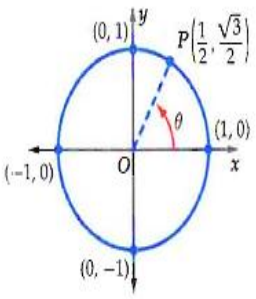


الرموز: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت: $\theta = 120°$ فإن

$P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$

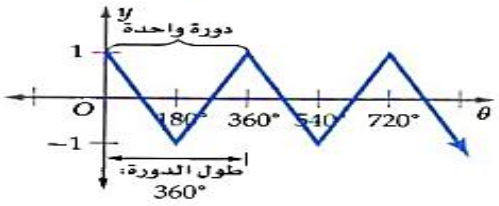
إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، فأوجد كلاً من $\cos\theta, \sin\theta$.



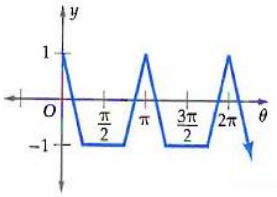
الدوال الدورية : في الدوال الدورية يكون شكل الدالة وقيمها (y) عبارة عن تكرار لنمط على فترات منتظمة متتالية. بحيث يُسمّى النمط الواحد الكامل منها دورة، وتُسمّى المسافة الأفقية في الدورة طول الدورة.

θ	y
0°	1
180°	−1
360°	1
540°	−1
720°	1

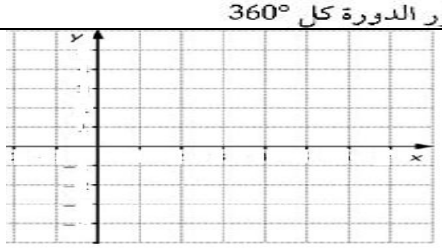
تتكرر الدورة كل 360°



أوجد طول الدورة للدالة المثلة بيانياً في الشكل المجاور



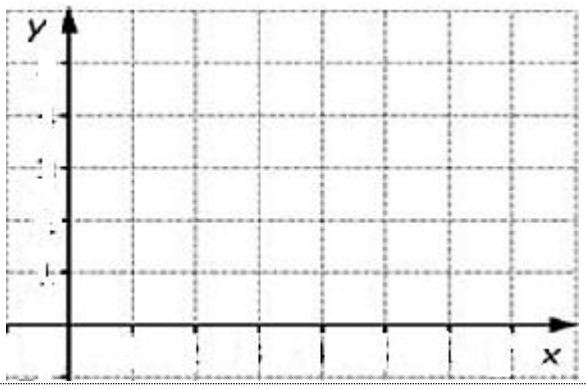
* مثل بيانياً دالة دورتها 4



يمثل الجدول المجاور ، ارتفاع البدال في الدراجة الهوائية كدالة في الزمن .

الارتفاع (in)	الزمن (s)
18	0
11	0.5
4	1.0
11	1.5
18	2.0
11	2.5
4	3.0

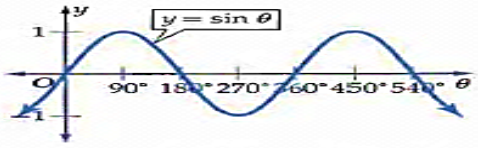
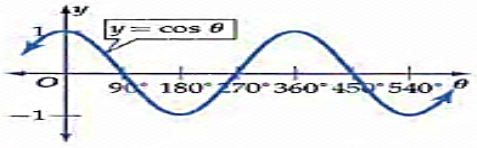
a) مثل الدالة الممثلة لهذا الموقف بيانياً .



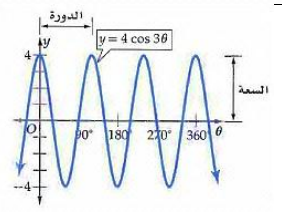
b) أوجد طول دورة الدالة .

٧) تمثيل الدوال المثلثية بيانياً :

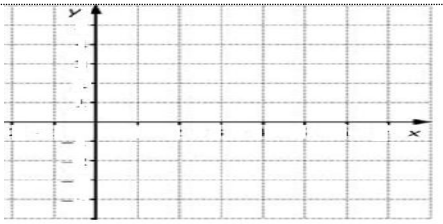
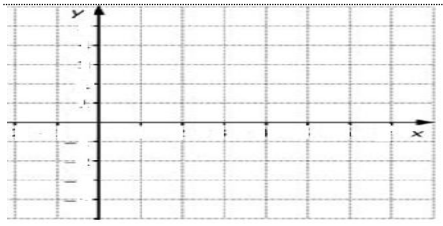
دالتا الجيب وجيب التمام

الدالة المولدة (الأم)	$y = \sin\theta$	$y = \cos\theta$
التمثيل البياني		
المجال	مجموعة الأعداد الحقيقية	مجموعة الأعداد الحقيقية
المدى	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
السعة	1	1
طول الدورة	$360°$	$360°$

في الدوال المثلثية : $y = a\sin b\theta$, $y = a\cos b\theta$، التي سعتها $|a|$، وطول دورتها $\frac{360°}{|b|}$.

أوجد السعة وطول الدورة للدالة		أوجد السعة وطول الدورة للدالة
$y = 4\cos 3\theta$		1A. $y = \cos\frac{1}{2}\theta$
		1B. $y = 3\sin 5\theta$

مثل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً

2A. $y = 3\cos\theta$	2B. $y = \frac{1}{2}\sin 2\theta$
	

طول الدورة = $\frac{1}{\text{التردد}}$ ، $|b| = 2\pi \times$ التردد

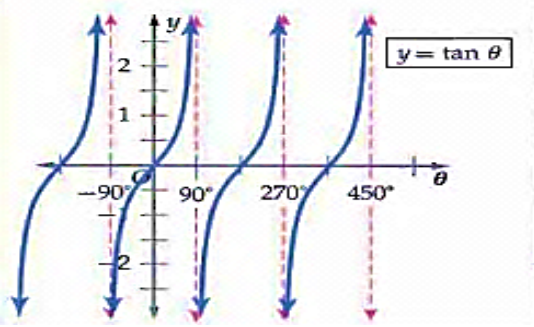
يمكن للإنسان سماع أصوات ترددها يصل إلى 20 هيرتز . (هيرتز = دورة / ثانية)

3A. أوجد طول دورة الدالة .	3B. افترض أن السعة تساوي وحدة واحدة . اكتب دالة جيب التمام التي تعبر عن موجات الصوت ، ثم مثلها بيانياً

دالة الظل

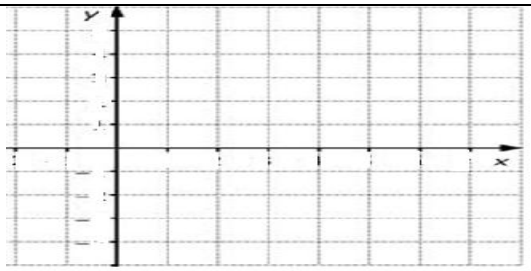
الدالة المولدة (الأم)	$y = \tan\theta$
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 90+180n,\ n \in Z\}$
المدى	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة
طول الدورة	$180°$

التمثيل البياني للدالة

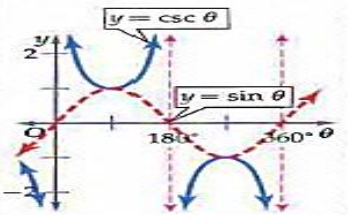
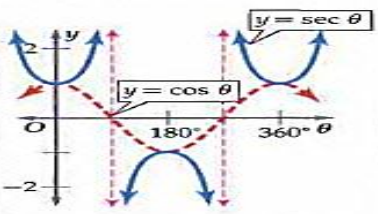
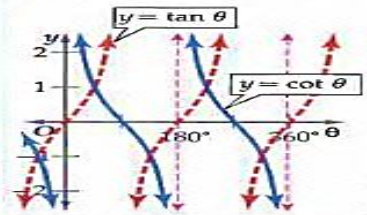


طول دورة منحنى الدالة $y = a\tan b\theta$ يساوي $\frac{180^\circ}{|b|}$ ولا يوجد لها سعة .وخطوط التقارب لها عند المضاعفات الفردية للعدد : $\frac{1}{2}\cdot\frac{180^\circ}{|b|}$

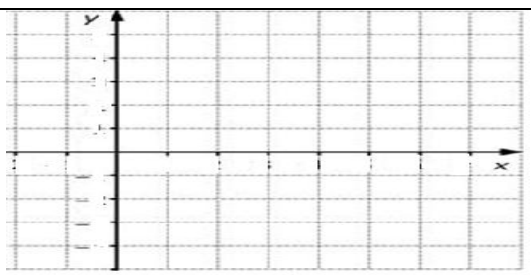
أوجد طول دورة الدالة $y = \frac{1}{2}\tan\theta$ ، ثم مثل هذه الدالة بيانياً



دوال قاطع التمام والقاطع وظل التمام

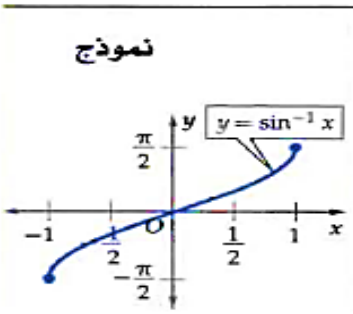
الدالة المولدة (الأم)	$y = \csc\theta$	$y = \sec\theta$	$y = \cot\theta$
التمثيل البياني			
المجال	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 90+180n,\ n \in Z\}$	$\{\theta \mid \theta \neq 180n,\ n \in Z\}$
المدى	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	$\{y \mid 1 \leq y \vee y \leq -1\}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
السعة	غير معرَّفة	غير معرَّفة	غير معرَّفة
طول الدورة	$360°$	$360°$	$180°$

أوجد طول دورة الدالة $y = \csc 2\theta$ ، ثم مثل هذه الدالة بيانياً .



٨) الدوال المثلثية العكسية :

الدوال المثلثية المعكوسة

الدالة العكسية	الرموز	المجال	المدى	نموذج
دالة معكوس الجيب	$y = \text{Arcsin}\, x$ $y = \text{Sin}^{-1}\, x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	
دالة معكوس جيب التمام	$y = \text{Arccos}\, x$ $y = \text{Cos}^{-1}\, x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$ $0° \le y \le 180°$	
دالة معكوس الظل	$y = \text{Arctan}\, x$ $y = \text{Tan}^{-1}\, x$	مجموعة الأعداد الحقيقية	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $-90° \le y \le 90°$	

A١.أوجد قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان في كل مما يأتي

a) $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$

b) $Arc\tan 1$

c) $Cos^{-1}0$

d) $Arc\sin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

A٢.أوجد قيمة كل مما يأتي ، إلى أقرب جزء من مئة :

a) $\sin\ (\tan^{-1}(\frac{3}{8}))$

b) $\cos(Ar\cos-\frac{\sqrt{2}}{2})$

١ إذا كان $Sin\theta = -0.35$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي :

a) $-20.5°$ b) $-0.6°$ c) $0.6°$ d) $20.5°$

٢ إذا كان $Tan\theta = 1.8$ ، فإن قياس الزاوية θ بالدرجات يساوي :

a) $0.03°$ b) $29.1°$ c) $60.9°$ d) لا يوجد حل

لعبة تزحلق للأطفال ، ارتفاعها $2m$ ، وطولها $3m$ كما في شكل المجاور . اكتب دالة مثلثية عكسية يمكن استعمالها لإيجاد قيمة الزاوية θ التي تصنعها لعبة التزحلق مع الأرض . ثم أوجد قياس هذه الزاوية بالدرجات إلى أقرب جزء من عشرة .